الجزء 1 الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
التأسيس

1 المقادير المعرفة وغير المعرفة

2 حل المعادلات باستخدام الجذور

المقادير المعرفة وغير المعرفة

كل عدد معرف هو عدد حقيقي، ولكن متى يكون غير معرف؟

الجواب: يكون المقدار غير معرف في 3 حالات هي:

a. عندما يكون المقام = صفر

b. عندما يكون جذر زوجي وبداخله عدد سالب

$\sqrt[\text{زوجي}]{\text{سالب}}$

c. $\ln x$, $\log x$ عندما $x \le 0$

ملحوظة

(∞) كذلك $(-\infty)$ أعداد غير معرفة

توضيح ما سبق:

a) $\frac{0}{0}$, $\frac{4}{0}$, $\frac{-3}{0}$, $\frac{2}{0}$

جميع المقادير غير معرفة لأن المقام = 0

بما في ذلك $\frac{0}{0}$

ولكن انتبه $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$ مثلاً $\frac{0}{3} = 0$

b) $\sqrt[6]{1} = 1$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt{4} = 2$

$\sqrt[4]{-16} =$ غير معرف $\sqrt{-4} =$ غير معرف

$\sqrt[6]{-1} =$ غير معرف

بينما الجذور الفردية دائماً معرفة

$\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[7]{-1} = -1$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$

انتبه

$\sqrt{-x}$ بداخل الجذر الزوجي سالب، ولكن ليس معنى ذلك أنه غير معرف لأن (x) متغير وليس عدد ثابت.

عندما x سالبة يكون ما داخل الجذر موجب وبالتالي معرف

كل مما يلي أعداد حقيقية:

$3\,,\frac{5}{2}\,,-4\,,-\frac{2}{7}\,,\sqrt{5}\,,\sqrt[3]{-2}\,,0.3\,,-0.35$

كل مما يلي أعداد غير حقيقية:

$\sqrt{-3}\,,\frac{2}{0}\,,\frac{0}{0}\,,\ln 0\,,\log 0\,,\ln -3\,,\log -4$

حل المعادلات باستخدام الجذور

عند حل معادلة إذا كان الأُس زوجي في حالة المساواة مع عدد موجب يوجد حلين للمعادلة، وإذا كان الأُس فردي يوجد حل واحد، والأمثلة التالية توضح ذلك:

سؤال
جد حل المعادلات التالية:

(1) $x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

(2) $x^4 = 16$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x = \pm 2$

(3) $x^6 = 1$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[6]{1} \rightarrow x = \pm 1$

(4) $x^3 = 8$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

(5) $x^3 = -8$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

(6) $x^5 = -32$

$\rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$

تحذير هام

عند السؤال عن الجذر (الجذر موجود بالأصل)

فإن يكون حل واحد فقط مثل:

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$

خطأ شائع $\sqrt{4} = \pm 2$

الجزء 2 قوانين الأسس
التأسيس

1) الأُسس في حالة الضرب تجمع بشرط أن تكون الأساسات متساوية $x^n . x^m = x^{(n+m)}$

مثال

(1) $x^2 . x^3 = x^5$

(2) $x^5 . x^{-2} = x^3$

2) الأُسس في حالة القسمة تطرح بشرط أن تكون الأساسات متساوية $\frac{x^n}{x^m} = x^{(n-m)}$

مثال

(1) $\frac{x^7}{x^2} = x^5$

(2) $\frac{x}{x^3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

3) الأُس السالب ينزل على المقام يصبح موجب

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

(1) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

(2) $(3)^{-2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$

ملحوظة

الأُس هو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه

$$(4)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$(2)^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

مثال

$$(\text{سالب})^{\text{فردي}} = \text{سالب} \quad , \quad (\text{سالب})^{\text{زوجي}} = \text{موجب}$$

$$(-1)^{95} = -1 \quad , \quad (-1)^{100} = 1$$

4) عندما يكون هنالك مقدار مرفوع إلى قوتين فإن الأس الناتج يكون حاصل ضرب القوتين.

$$(x^n)^m = x^{(n \times m)}$$

مثال

(1) $(x^2)^3 = x^{(2\times3)} = x^6$

(2) $(x^{12})^{\frac{1}{3}} = x^{\left(12\times\frac{1}{3}\right)} = x^4$

5) توزيع الأُس على الضرب والقسمة ولا يوزع على الجمع والطرح

$$(x.y)^n = x^n.y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

ولكن $(x \pm y)^n \neq (x^n \pm y^n)$

مثال

(1) $\left(x(y-1)\right)^2 = x^2.(y-1)^2$

(2) $x^3.y^3 = (xy)^3$

(3) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^3 = \frac{x^3}{(x-1)^3}$

6) أي عدد مرفوع للأُس (صفر) يكون الجواب (واحد) بشرط أن الأساس لا يساوي (صفر)

$$x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$$

مثال

(1) $(3)^0 = 1$

(2) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1$

(3) $(0)^0 =$ غير معرف

7) الأسس النسبية $\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$

مثال

(1) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

(2) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

(3) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1}$

(4) $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$

(5) $x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$

(6) $(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(7) $(16)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(16)^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3$
$= 4^3 = 64$

(8) $(27)^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{(27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

الجزء 3

العمليات على المقادير الجبرية

التأسيس

1. جمع وطرح المقادير الجبرية
2. ضرب المقادير الجبرية
3. فك الأقواس
4. الكسور وتوحيد المقامات

جمع وطرح المقادير الجبرية

يكون الجمع والطرح للحدود المتشابهة فقط حيث نجمع ونطرح المعاملات.

مثال

(1) $\boldsymbol{3x+2x}=5x$

(2) $\boldsymbol{4x^2-x^2}=3x^2$

(3) $\boldsymbol{x-5x}=-4x$

(4) $\boldsymbol{-2x^3-5x^3}=-7x^3$

(5) $\boldsymbol{2x+x^2}$ لا يجوز الجمع

(6) $\boldsymbol{2x+y^2}$ لا يجوز الجمع

(7) $\boldsymbol{3x-2x^2+5x+6x^2}=\boxed{8x+4x^2}$

أبسط صورة

ضرب المقادير الجبرية

الأسس في حالة الضرب تجمع والمعاملات تضرب.

مثال

(1) $\boldsymbol{(2x)(3x)}=6x^2$

(2) $\boldsymbol{(5x)(-3x^2)}=-15x^3$

(3) $\boldsymbol{(-4x^2)(-3x^3)}=12x^5$

(4) $\boldsymbol{(-3y^2)(-2xy)}=6xy^3$

فك الأقواس

نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح.

مثال

(1) $\boldsymbol{x(x^2+3)}=x^3+3x$

(2) $\boldsymbol{(x^2-3x)(2x+5)}$

$=2x^3+5x^2-6x^2-15x$

بتجميع الحدود المتشابهة

$=2x^3-x^2-15x$

مِقدار الوقت
الذي تقضيه في التدريب ليس هو
المهم بالضرورة، فالمهم هو ما تبذله
من جهد في التدريب.

انتبه

قاعدة فك التربيع:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

مربع اول ± **2** × الأول × ثاني + مربع ثاني

مثال

(1) $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(2) $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

(3) $(-3-2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$

(4) $(x+2)^3 = (x+2)(x+2)^2$

$= (x+2)(x^2+4x+4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 8x + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

الكسور وتوحيد المقامات

❖ في حالة الضرب

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

نضرب البسطين ونضرب المقامين.

مثال

(1) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

(2) $\frac{3}{10} \times \frac{-1}{5} = \frac{-3}{50}$

(3) $\frac{x}{x-1} \times \frac{x+2}{x-3} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x-3)}$

$= \frac{x^2+2x}{x^2-3x-x+3} = \frac{x^2+2x}{x^2-4x+3}$

❖ في حالة القسمة

البسط

المقام

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

تحويل القسمة إلى ضرب حيث نقلب المقام.

مثال

(1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

(2) $\frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}}$$

(3) $\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$$\boxed{\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}}$$

❖ في حالة الجمع والطرح.

a) عندما يوجد علاقة بين المقامين.

مثال

(1) $\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{2\times2}{2\times3} + \frac{7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$

(2) $\frac{3}{10} - \frac{7}{2} = \frac{3}{10} - \frac{5\times7}{5\times2}$

$= \frac{3}{10} - \frac{35}{10} = \frac{-32}{10} = \frac{-16}{5}$

(3) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3}{x-2}$

$$= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3x+6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-3x-6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-6}{x^2-4}$$

b) عندما لا يوجد علاقة بين المقامين.

نتبع طريقة المقص (مقامين ثم قطرين)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

مثال

(1) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21+10}{35} = \frac{31}{35}$

(2) $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} = \frac{35-12}{15} = \frac{23}{15}$

(3) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+3}$

$$= \frac{3(x+3)+x(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{3x+9+x^2-x}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+2x+9}{x^2+2x-3}$$

(4) $\frac{2x}{x+2} - \frac{4}{x-1}$

$$= \frac{2x(x-1)-4(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-4x-8}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-6x-8}{x^2+x-2}$$

الجزء 4 التحليل إلى العوامل

التأسيس

1 فرق بين مربعين

2 فرق ومجموع مكعبين

3 عبارة تربيعية ثلاثية الحدود

4 إخراج عامل مشترك

5 درجة ثالثة فأكثر

فرق بين مربعين

$$x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

قوسين متشابهين مختلفين في الإشارة.

حيث نأخذ الجذر التربيعي للحد الأول والجذر التربيعي للحد الثاني.

مثال

(1) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

(2) $9 - x^2 = (3-x)(3+x)$

(3) $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$

(4) $\frac{1}{16}x^2 - 49 = (\frac{1}{4}x - 7)(\frac{1}{4}x + 7)$

(5) $x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

(6) $x - 5 = (\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})$

(7) $2x^2 - 32 = 2(x^2-16)$

$$= 2(x-4)(x+4)$$

(8) $x^2+4 \rightarrow$ (لا تحلل) مجموع مربعين

(9) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$

$$=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

فرق ومجموع مكعبين

فرق بين مكعبين

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

القوس الصغير: نأخذ الجذر التكعيبي للحد الأول

والثاني، مع الحفاظ على نفس إشارة المقدار.

القوس الكبير= (مربع الأول ثم عكس الإشارة ثم

الاول × الثاني ثم مربع الثاني)

مجموع بين مكعبين

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

ملحوظة مهمة

القوس الأكبر دائما لا يحلل (مميزه سالب)

مثال

(1) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

(2) $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

(3) $2x^3+128$

بإخراج العدد (2) عامل مشترك ينتج:

$$=2(x^3+64)$$

بالتحليل مجموع مكعبين ينتج:

$$=2(x+4)(x^2-4x+16)$$

مثال حل المعادلات التالية:

(1) $x^2-4=0$

طريقة 1

$$(x-2)(x+2)=0$$

$$x=2 \quad or \quad x=-2$$

طريقة 2

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$$

$$x=\pm 2$$

(2) $2x^2-6=0 \rightarrow \frac{2x^2}{2}=\frac{6}{2}$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

(3) $x^2+1=0$

عبارة تربيعية لا تحلل

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي

(4) $x^3-64=0$

$$\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{64} \rightarrow x=4$$

(5) $x^3+27=19 \rightarrow x^3=19-27$

$$\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{-8} \rightarrow x=-2$$

عبارة تربيعية ثلاثية الحدود

$$ax^2 + bx + c$$

حالة 1 عندما $a = 1$ أي أن معامل x^2 يساوي *(1)*

مثال حلل ما يلي إلى عوامله الأولية:

(1) $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

عددين حاصل ضربهما 4 والفرق بينهما 3 هما 1,4

توضيح إشارة القوسين

في القوس الأول نقوم بإنزال نفس إشارة الحد الأوسط وفي القوس الثاني نقوم بضرب إشارة الأوسط في إشارة الحد الأخير.

انتبه ضع العدد الأكبر دائماً في القوس الأول.

(2) $x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 الفرق بينهما 4 هما 2,6

(3) $x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 7 هما 3,4

(4) $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 8 هما 2,6

(5) $x^2 + 26x - 27 = (x+27)(x-1)$

عددين حاصل ضربهما 27 والفرق بينهما 26 هما 1,27

مثال حل المعادلات التالية:

(1) $x^2 + 5x = 6$

يجب أولاً جعل المعادلة = 0

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$\rightarrow (x+6)(x-1) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad or \quad x - 1 = 0$$
$$x = -6 \quad or \quad x = 1$$
$$x = \{-6, 1\}$$

(2) $2x = -x^2 + 15$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\rightarrow (x+5)(x-3) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad or \quad x - 3 = 0$$
$$x = -5 \quad or \quad x = 3$$
$$x = \{-5, 3\}$$

ملحوظة في حالة أن العبارة التربيعية لا تحلل بين أقواس نلجأ للمميز والقانون العام.

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$		
سالب	**صفر**	**موجب**
لا يوجد حل حقيقي	$x = \frac{-b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

(3) $x^2 + x = 3 \rightarrow x^2 + x - 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-3) = 13$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(4) $\boldsymbol{x^2+2x+3=0}$

$\Delta = b^2-4ac$

$\rightarrow \Delta = (2)^2-4(1)(3)=-8$ لا تحل

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي

حالة 2 **عندما $a \neq 1$ معامل x^2 لا يساوي *(1)***

مثال ***حلل ما يلي الى عوامله الأولية:***

(1) $\boldsymbol{2x^2+5x-3}$

$x^2+5x-(3\times 2)$ ***معامل x^2 يضرب بالثابت***

x^2+5x-6 ***الآن يحلل مثل حالة 1***

$(x+6)(x-1)$

بقسمة الحد الثابت بالقوس على معامل x^2 الأصلي

إذا كانت تقبل القسمة بقسمهم، لا تقبل القسمة

يوضع المعامل لـ x

$$\left(x+\cancel{\frac{6}{2}}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$(x+3)(2x-1)$$

$\rightarrow 2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$

(2) $\boldsymbol{3x^2+16x-12}$

$=x^2+16x-36$

$=\left(x+\frac{18}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$=(x+6)(3x-2)$

(3) $\boldsymbol{5x^2-11x+2}$

$=x^2-11x+10$

$=\left(x-\frac{10}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$

$=(x-2)(5x-1)$

إخراج عامل مشترك

نقوم بإخراج الأس الأصغر عامل مشترك عندما لا يوجد حد مطلق (حد ثابت).

مثال ***حلل ما يلي الى عوامله الأولية:***

(1) $\boldsymbol{x^2-3x}=x(x-3)$

(2) $\boldsymbol{5x+10x^2}=5x(1+2x)$

(3) $\boldsymbol{x^3-4x}=x(x^2-4)$

$=x(x-2)(x+2)$

(4) $\boldsymbol{x^3-3x^2+2x}=x(x^2-3x+2)$

$=x(x-2)(x-1)$

(5) $\boldsymbol{x^2-4x^3}=x^2(1-4x)$

مثال ***جد حل المعادلات التالية:***

(1) $\boldsymbol{x^2=3x}$

يجب أولاً جعل المعادلة $=0$

انتبه لا يجوز القسمة على (x) لأن x ممكن أن تكون صفر

$\rightarrow x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0 \quad or \quad x=3$

(2) $\boldsymbol{x^2 = 4x^3} \to x^2 - 4x^3 = 0$

$$x^2(1-4x)=0$$

$$x^2 = 0 \quad or \quad 1-4x=0$$

$$\boxed{x=0} \quad or \quad 1=4x$$

$$\boxed{x=\frac{1}{4}}$$

درجة ثالثة فأكثر

مثال ***جد حل المعادلات التالية:***

(1) $\boldsymbol{x^3 - 7x + 6 = 0}$

نجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود

أجد عوامل الحد الثابت $6 \leftarrow 1\,,2\,,3\,,6$

أجد عوامل المعامل الرئيس $1 \leftarrow 1$

$\therefore$ **الأصفار النسبية** هي $\pm \dfrac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل المعامل الرئيس}}$

منه $\pm1\,,\pm2\,,\ \pm3\,,\ \pm6$

بالتجريب $x=1 \to 1-7+6=0$

وبالتالي $x=1$ جذر للمعادلة وبالتالي:

$(x-1)$ أحد العوامل

الآن نلجأ للقسمة الطويلة

خطوات القسمة الطويلة

ترتيب كل من المقسوم والمقسوم عليه حسب قوى x

قسمة الحد الأعلى من المقسوم على الحد الأعلى من المقسوم عليه

ضرب الناتج في المقسوم عليه

نغير الاشارات ونجمع

تكرار نفس الخطوات

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 6 \\ \hline x-1 & x^3 - 7x + 6 \\ & -\ x^3 \pm x^2 \\ \hline & x^2 - 7x + 6 \\ & -\ x^2 \pm x \\ \hline & -6x + 6 \\ & \pm 6x \mp 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2)=0$$

$$x=1\,, x=-3\,, x=2$$

(2) $\boldsymbol{2x^3 + 2x = -3x^2 - 1}$

$$2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

عوامل الحد الثابت $1 \leftarrow 1$

عوامل الحد الرئيس ← $1,2$

الأصفار النسبية $\pm1, \pm\frac{1}{2}$

بالتجريب $x = -1 \rightarrow -2 + 3 - 2 + 1 = 0$

أحد العوامل $x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x + 1 \\
\hline
x+1 & 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
 & -(2x^3 + 2x^2) \\
\hline
 & x^2 + 2x + 1 \\
 & -(x^2 + x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$(x + 1)(2x^2 + x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \quad or \quad 2x^2 + x + 1 = 0$

$x = -1 \quad or \quad \Delta = (1)^2 - 4(2)(1) = -7$

المميز سالب لا تحلل

الجزء 5 اقتران كثير الحدود واقتران القيمة المطلقة

التأسيس

اقتران كثير الحدود

يسمى $f(x)$ اقتران كثير حدود إذا كان على صورة:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث المعاملات أعداد حقيقية، والأسس أعداد صحيحة غير سالبة، وتسمى أكبر قوة بالدرجة.

ومن الأمثلة على كثيرات الحدود:

(1) $f(x) = x^3 - 4x + 5$

كثير حدود من الدرجة الثالثة (تكعيبي)

(2) $f(x) = 7x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$

كثير حدود من الدرجة الثانية (تربيعي)

(3) $f(x) = \frac{7}{5} - 2x$

كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي)

(4) $f(x) = \frac{2}{3}x - 7$

كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي)

(5) $f(x) = 4$

كثير حدود من الدرجة الصفرية (ثابت)

لا حظ أن كثير الحدود مكتوب على صورة بسط ومعرف بقاعدة واحدة فقط **(ليس متشعب)**.

ومن الأمثلة على اقترانات **ليست** كثيرات حدود:

(1) $f(x) = 2x^{-3} + 5x - 1$

الأس عدد صحيح سالب

(2) $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - x$

الأس كسر وليس صحيح

(3) $f(x) = \sqrt{x} + 4$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ الأس كسر وليس صحيح

اقتران نسبي $(4)\quad f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$

اقتران متشعب $(5)\quad f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 1 \\ x^2-3 & ,x<1 \end{cases}$

ملحوظة الاقترانات المثلثية والأسية واللوغاريتمية

ليست كثيرات حدود.

الصورة العامة لبعض اقترانات كثيرات الحدود

احفظ

$(1)\quad f(x)=c$ ثابت

$(2)\quad f(x)=ax+b$ خطي

$(3)\quad f(x)=ax^2+bx+c$ تربيعي

$(4)\quad f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تكعيبي

ملحوظة مهمة

إذا كان كل من البسط والمقام كثيرات حدود يسمى

اقتران نسبي مثل

$1)\quad f(x)=\dfrac{2x+5}{x+5}$

$2)\quad f(x)=\dfrac{3}{x^2-4}$

ولكن $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{x+2}$ ليس اقتران نسبي لأن البسط

ليس كثير حدود وهذا الاقتران يسمى اقتران كسري

اقتران القيمة المطلقة

تذكير $|-4|=4\quad,\quad |3|=3$

مفهوم المطلق ان يكون الناتج دائماً موجب

* طريقة اعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة

$$f(x)=|g(x)|$$

1) نجد أصفار الاقتران وذلك بجعل $g(x)=0$

2) على خط الاعداد نعين الاصفار ونختبر اشارة ما داخل القيمة المطلقة $g(x)$

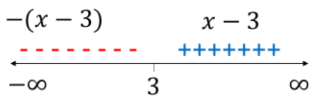
3) إذا كان موجباً تبقى القاعدة كما هي وإذا كان سالباً تضرب القاعدة في سالب

مثال أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

$(1)\quad f(x)=|x-3|$

الحل:

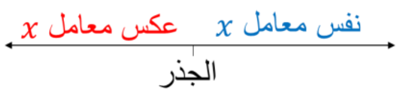
$x-3=0\rightarrow x=3$ جذر



$$f(x)=\begin{cases} 3-x & ,x<3 \\ x-3 & ,x\geq 3 \end{cases}$$

يمكن وضع اشارة المساواة اما عند اشارة أكبر أو اشارة أقل

ملحوظة مهمة اذا كان نوع الاقتران خطي فإن



(2) $\boldsymbol{f(x) = |6 - 3x|}$

الحل:

$6 - 3x = 0 \rightarrow 6 = 3x \rightarrow x = 2$ جذر

$(6-3x)$ $-(6-3x)$

$+++++++$ $--------$

$-\infty$ 2 ∞

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 3x & , x < 2 \\ 3x - 6 & , x \geq 2 \end{cases}$$

(3) $\boldsymbol{f(x) = x^2|x|}$

الحل:

$|x| = 0 \rightarrow x = 0$

$-x$ x

$-------$ $+++++++$

$-\infty$ 0 ∞

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & , x < 0 \\ x^3 & , x \geq 0 \end{cases}$$

(4) $\boldsymbol{f(x) = |x^2 - 4|}$

الحل:

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = \mp 2$

$x^2 - 4$ $-(x^2-4)$ $x^2 - 4$

$+++++$ $-----$ $+++++$

$-\infty$ -2 2 ∞

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x < -2 \ or \ x \geq 2 \\ 4 - x^2 & , -2 \leq x < 2 \end{cases}$$

ملحوظة مهمة اذا كان الاقتران تربيعي وله جذران فإن

نفس   عكس   نفس معامل x^2

جذر1   جذر2

(5) $\boldsymbol{f(x) = |3x - x^2|}$

الحل:

$x(3 - x) = 0 \rightarrow x(3 - x) = 0$

$x = 0 \ , 3 - x = 0 \rightarrow 3 = x$

$-(3x - x^2)$ $3x - x^2$ $-(3x - x^2)$

$-----$ $+++++$ $-----$

$-\infty$ 0 3 ∞

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & , \ x < 0 \ or \ x \geq 3 \\ 3x - x^2 & , \ 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

ملحوظة مهمة إذا كان الاقتران تربيعي وله جذر واحد فقط أو ليس له جذور فإن له اشاره واحدة فقط وهي نفس معامل x^2 كما في المثال التالي

(6) $\boldsymbol{f(x) = |x^2 + 1|}$

الحل:

$x^2 + 1 \neq 0$ لا يحلل (مميزه سالب)

$x^2 + 1$

$++++++++++++++$

$-\infty$ ∞

$\rightarrow f(x) = x^2 + 1$

الجزء 6 حل معادلات بالحذف والتعويض

التأسيس

1 حل معادلتين خطيتين أو تربيعيتين

2 حل معادلتين خطية وتربيعية

حل معادلتين خطيتين أو تربيعيتين

طريقة الحذف:

مثال جد حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{x = 5 - 3y \ldots (1)}$$
$$\boldsymbol{2x = 3y + 1 \ldots (2)}$$

نرتب المعادلتين كما يلي:

$$x + 3y = 5 \ldots (1)$$
$$2x - 3y = 1 \ldots (2)$$

وحتى نحذف أحد المتغيرين يجب أن تكون المعاملات

متساوية ومختلفة في الإشارة مثل $3y, -3y$

وبالتالي نجمع المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & x + \cancel{3y} = 5 \\ + & 2x - \cancel{3y} = 1 \\ \hline & 3x = 6 \end{array}$$

$$\rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

وبتعويض $x = 2$ في أي من المعادلتين وليكن

معادلة (1) مثلا ينتج:

$$2 + 3y = 5 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$$

حل المعادلة هو الزوج $(2,1)$

مثال جد حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{3x + y = 8 \ldots (1)}$$
$$\boldsymbol{x + 2y = 1 \ldots (2)}$$

بضرب المعادلة (1) بالعدد (-2) ينتج:

$$\begin{array}{rl} & -6x - \cancel{2y} = -16 \ldots (3) \\ + & x + \cancel{2y} = 1 \ldots (2) \\ \hline & -5x = -15 \end{array}$$

$$\rightarrow x = \frac{-15}{-5} = 3$$

وبالتعويض في معادلة (2) ينتج:

$$3 + 2y = 1 \rightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1$$

مجموعة الحل: $(3, -1)$

مثال جد حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{2x^2 + 3y^2 = 11 \ldots (1)}$$
$$\boldsymbol{7x^2 - 2y^2 = 26 \ldots (2)}$$

بضرب المعادلة (1) بالعدد (2) والمعادلة (2) بالعدد (3) ينتج:

$$\begin{array}{rl} & 4x^2 + \cancel{6y^2} = 22 \ldots (3) \\ + & 21x^2 - \cancel{6y^2} = 78 \ldots (4) \\ \hline & 25x^2 = 100 \end{array}$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{100}{25} = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

وبالتعويض في معادلة (1) ينتج:

$$2(\pm 2)^2 + 3y^2 = 11$$

$$\rightarrow 8 + 3y^2 = 11 \rightarrow 3y^2 = 3$$

$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

مجموعة الحل:

$$(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)$$

حل معادلة خطية وتربيعية

في هذه الحالة نستخدم التعويض كما يلي:

من المعادلة الخطية نجعل أحد المتغيرين موضع للقانون ثم نقوم بالتعويض في المعادلة التربيعية لتصبح بمتغير واحد.

مثال جد حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{x - y = 3 \ldots (1)}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 29 \ldots (2)}$$

من المعادلة الخطية $x = 3 + y \leftarrow$ وبالتعويض في معادلة (2) :

$$(3 + y)^2 + y^2 = 29$$

$$9 + 6y + y^2 + y^2 - 29 = 0$$

$$2y^2 + 6y - 20 = 0$$

وبالقسمة على (2) ينتج:

$$y = -5 \quad or \quad y = 2$$

عندما $y = -5$ نعوض في المعادلة الخطية إجباري:

$$x = 3 + (-5) = -2$$

عندما $y = 2$

$$x = 3 + (2) = 5$$

مجموعة الحل: $(-2,-5), (5,2)$

الجزء ٦ تحديد المجال ورسم بعض الاقترانات

التأسيس

تحديد المجال

*** المجال هو قيم x التي تجعل الاقتران معرف**

تذكير هام: يكون الاقتران غير معرف بثلاث حالات:

1) اصفار المقام

2) $\sqrt[\text{زوجي}]{\text{سالب}}$

3) لوغاريتم وبداخله سالب أو صفر

لذلك أي اقتران لا ينطبق عليه الحالات الثلاث السابق ذكرها يكون دائماً معرف وبالتالي مجاله R بينما اذا كان يحتوي اصفار مقام يكون مجاله

$$\boldsymbol{R} - \{\text{أصفارالمقام}\}$$

واذا كان $f(x) = \sqrt{\text{علي}}$ نقوم بعمل متباينه و هي

علي ≥ 0 ونحل المتباينة و نختار منطقة الموجب

وإذا كان $f(x) = log\,($علي$)$

أو $f(x) = ln\,($علي$)$ نقوم بعمل متباينة

علي > 0 ونحل المتباينة ونختار منطقة الموجب

مثال حدد مجال كل من الاقترانات التالية:

$1)\ f(x) = x^2 - 3x + 1$

الحل: مجاله $x \in R$

$2)\ f(x) = x^2 + sinx$

الحل: مجاله $x \in R$

$3)\ f(x) = e^{x^2} + 5x - 1$

الحل: مجاله $x \in R$

$4)\ f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

الحل:

مقام $= 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

غير معرف عند $x = 1$ **حيث** $f(1) = \frac{2}{0}$ **غيرمعرف**

مجاله $x \in R - \{1\}$

$5)\ f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 4x}$

الحل:

مقام $= 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0$

أصفار المقام $x = 0\ ,\ x = 4$

مجاله $x \in R - \{0\,,4\}$

$6)\ f(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2+1}$

الحل:

مقام $\neq 0$ مجموع مربعين لا يحلل مجاله $x \in R$

مثال حدد مجال كل من الاقترانات التالية :

$1)\ f(x) = \sqrt{x-1}$

الحل: جذر زوجي $\leftarrow$ $x - 1 \geq 0$

$\rightarrow x \geq 1$

مجاله $x \geq 1$

$2)\ f(x) = \sqrt{3x+6}$

الحل: جذر زوجي $\leftarrow$ $3x + 6 \geq 0$

$\rightarrow 3x \geq -6 \rightarrow x \geq \dfrac{-6}{3} \rightarrow x \geq -2$

مجاله $x \geq -2$

لاحظ المتباينات السابقة خطية يمكن حلها مباشرة

$3)\ f(x) = \sqrt{x^2-4}$

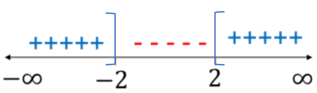
الحل: جذر زوجي $\leftarrow$ $x^2 - 4 \geq 0$

متباينة غيرخطية

تحويلها الى معادلة $x^2 - 4 = 0$

ايجاد الجذور $x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2$

اختبار الاشارة



مجاله $x \geq -2$ أو $x \leq -2$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x - x^2}$

الحل: جذر فردي ← مجاله $x \in R$

5) $f(x) = \sqrt{x}$

الحل: جذر زوجي ← مجاله $x \geq 0$

6) $f(x) = ln(x + 1)$

الحل: لوغاريتم ← $x + 1 > 0$

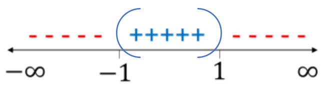
مجاله $x \geq -1$

7) $f(x) = log(1 - x^2)$

الحل: لوغاريتم ← $1 - x^2 > 0$

متباينة غير خطية $1 - x^2 = 0$

جذور $1 = x^2 \rightarrow x = \mp 1$



مجاله $-1 < x < 1$

أو مجاله $x \in (-1 , 1)$

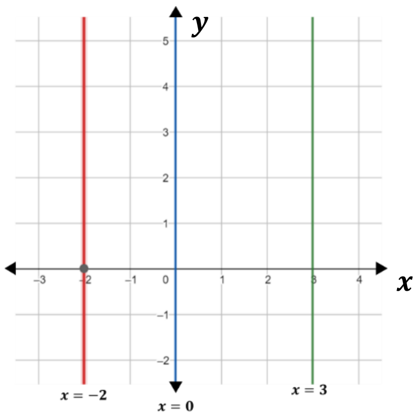
8) $f(x) = ln\, x$

الحل: لوغاريتم ← مجاله $x > 0$

المستقيمات الرأسية والأفقية

مثال ارسم كل من المستقيمات التالية:

1) $x = 3$ **2)** $x = -2$ **3)** $x = 0$

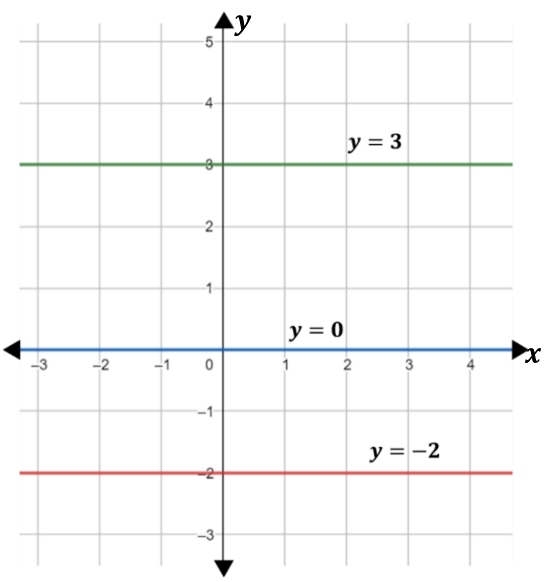


لاحظ أن المستقيم $x = c$ حيث c ثابت، يكون

مستقيم رأسي عمودي على محور x (يوازي المحور y)

مثال ارسم كل من المستقيمات التالية:

1) $y = 3$ **2)** $y = -2$ **3)** $y = 0$



لاحظ أن المستقيم $y = c$ حيث c ثابت، يكون

مستقيم أفقي يوازي المحور x ويسمى اقتران ثابت.

الاقتران الخطي

الصورة العامة: $f(x) = ax + b$

لرسم اقتران خطي نقوم بعمل جدول واختيار نقطتين

والتوصيل بينهما بخط مستقيم ويُفضل إيجاد المقطعين

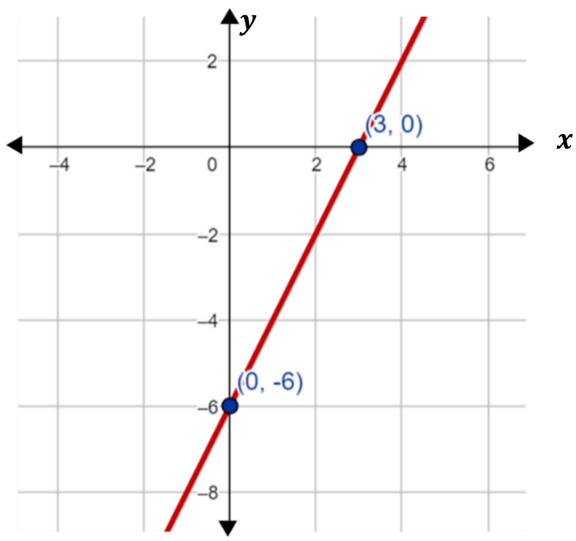
x, y .

لإيجاد المقطع (y) نجعل $x = 0$

لإيجاد المقطع (x) نجعل $y = 0$

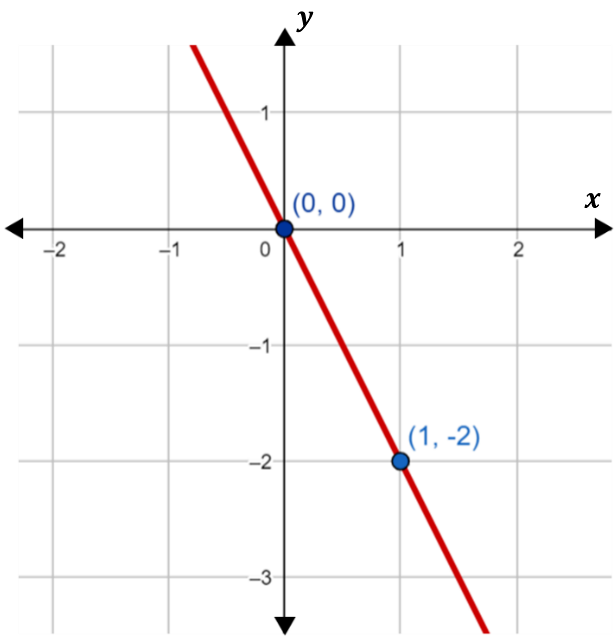
مثال ارسم الاقتران $f(x) = 2x - 6$

x	0	3
y	-6	0



مثال ارسم الاقتران $f(x) = -2x$

x	0	1
y	0	-2



مهم معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ الميل

مثال جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$(2, -1), (4, -5)$ ؟

$$(2, -1) \to (x_1, y_1)$$
$$(4, -5) \to (x_2, y_2)$$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-5--1}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2$$

معادلته هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y--1=-2(x-2)$$

$$y+1=-2x+4$$

$$\rightarrow y=-2x+3$$

الاقتران التربيعي

الاقتران التربيعي $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c}$

هو قطع مكافئ يكون اتجاه الفتحة إما لأعلى أو لأسفل

حسب إشارة معامل (x^2)

ولرسم اقتران تربيعي نجد احداثيات رأس القطع (x,y)

حيث $\boldsymbol{x=\frac{-b}{2a}}$ و $\boldsymbol{y=f(\frac{-b}{2a})}$ ثم عمل جدول يتضمن

نقطة الرأس ونقطتين على يمين ويسار نقطة الرأس.

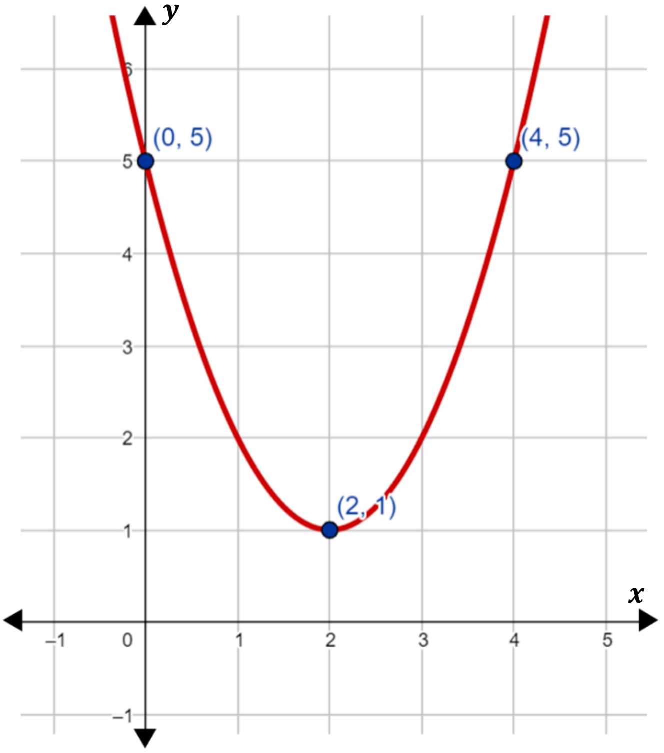
مثال ارسم الاقتران $\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+5}$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2$$

$$f(2)=(2)^2-4(2)+5=1$$

الرأس ← $(2,1)$

x	0	2	4
y	5	1	5



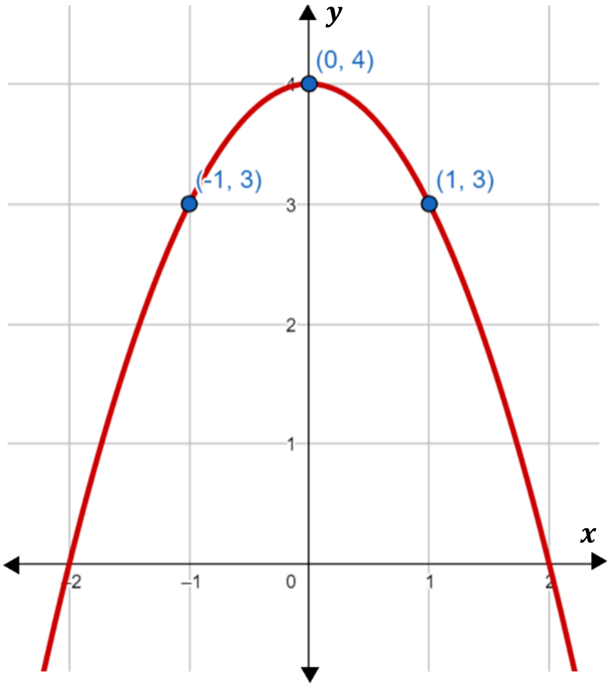
مثال ارسم الاقتران $\boldsymbol{y=4-x^2}$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2(-1)}=0$$

$$y=4-(0)^2=4$$

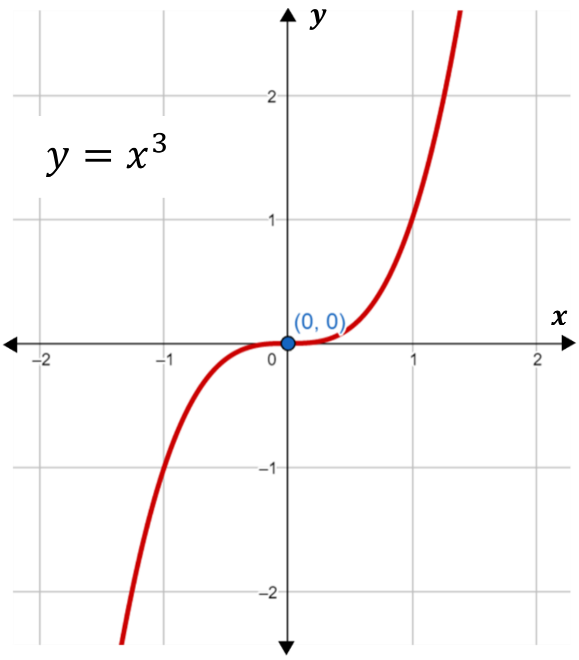
الرأس ← $(0,4)$

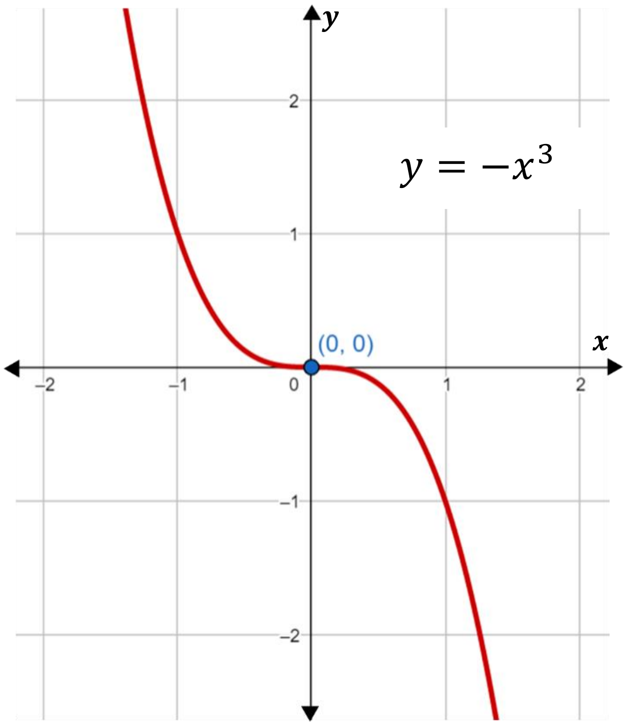
x	-1	0	1
y	3	4	3



الاقتران التكعيبي

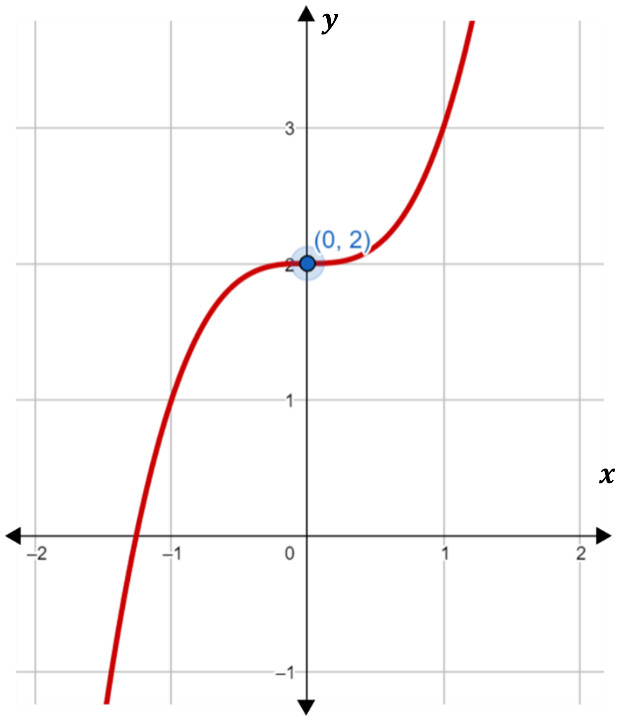
احفظ رسمة كل من $y = x^3$ ، $y = -x^3$





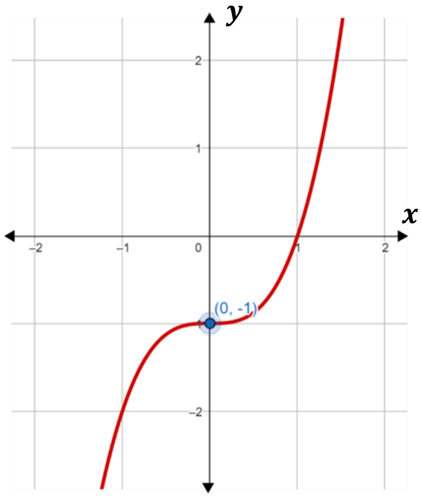
مثال ارسم الاقتران $y = x^3 + 2$

نفس رسمة $y = x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأعلى بمقدار وحدتين.



مثال ارسم الاقتران $y = x^3 - 1$

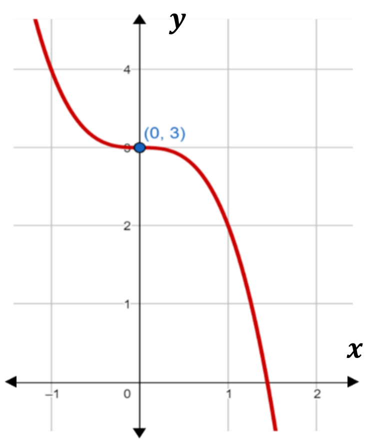
نفس رسمة $y = x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأسفل بمقدار وحده واحده.



مثال ارسم الاقتران $y = 3 - x^3$

إعادة ترتيب ← $y = -x^3 + 3$

نفس رسمة $y = -x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأعلى بمقدار (3) وحدات.

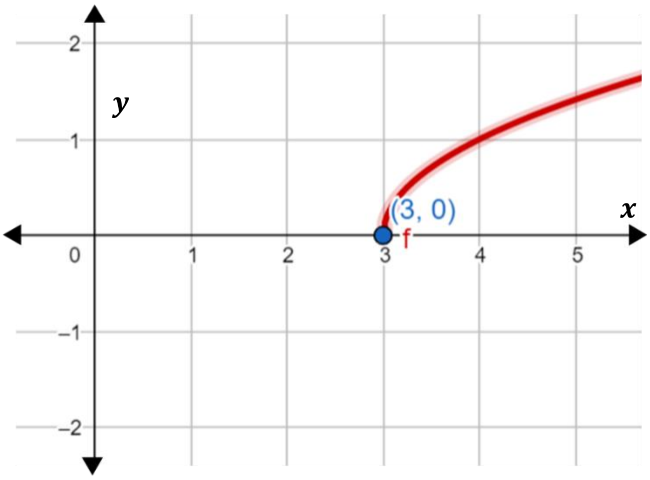


الجذور الزوجية

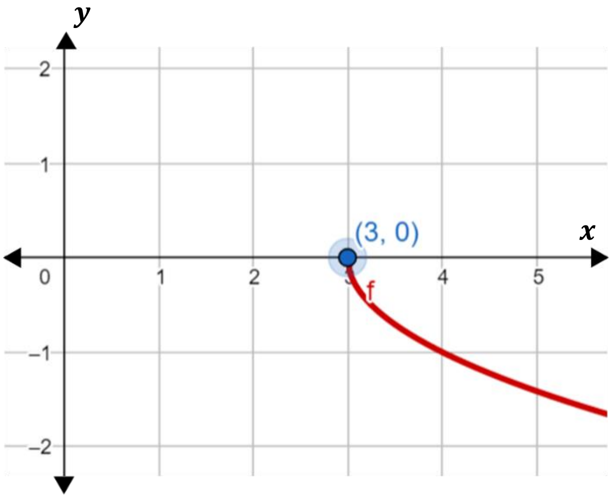
مثال ارسم الاقتران $f(x) = \sqrt{x - 3}$

نحدد مجاله حيث: $x - 3 \geq 0$

$\rightarrow x \geq 3$



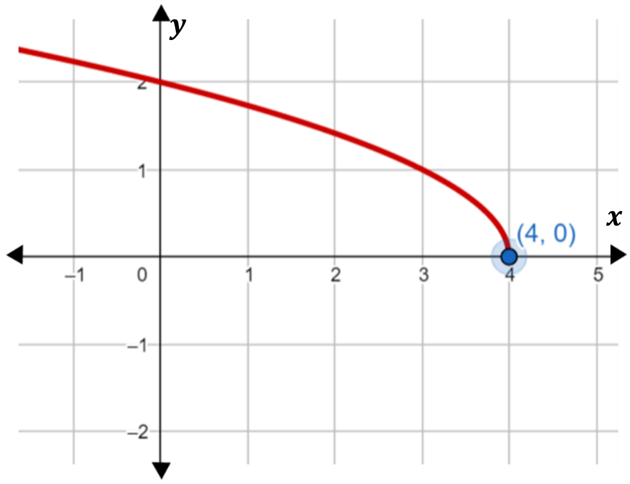
مثال ارسم الاقتران $f(x) = -\sqrt{x - 3}$



مثال ارسم الاقتران $f(x) = \sqrt{4-x}$

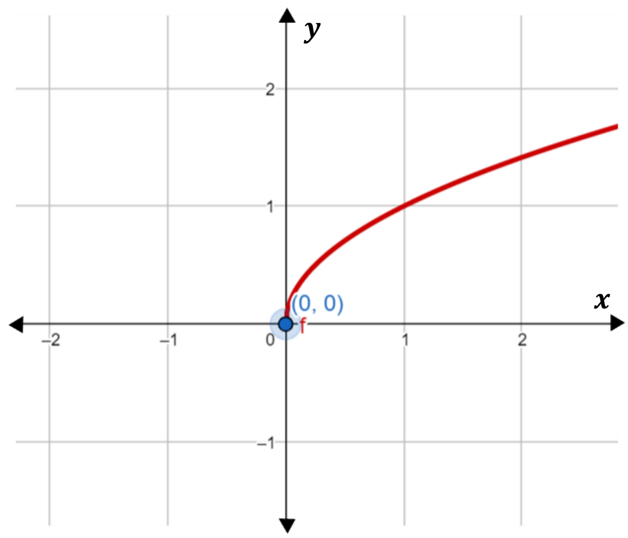
نحدد مجاله حيث: $4 - x \geq 0$

$4 \geq x \rightarrow x \leq 4$



مثال ارسم الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$

نحدد مجاله حيث: $x \geq 0$



الجزء 8 الاقترانات المثلثية

التأسيس

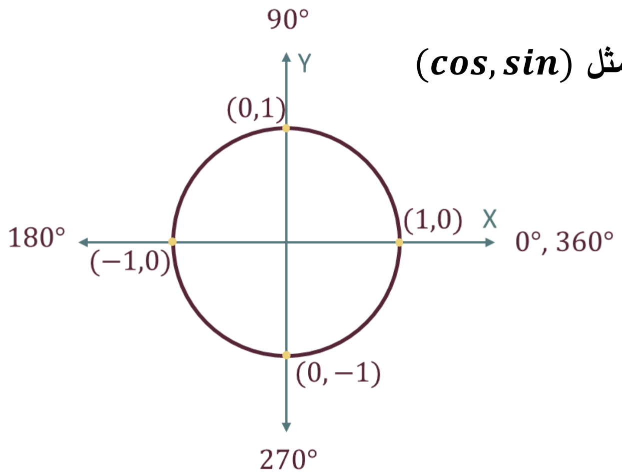
1 يتم حفظ جدول زوايا المرجع: $30°, 45°, 60°$

x	$\frac{\pi}{6} = 30^0$	$\frac{\pi}{4} = 45^0$	$\frac{\pi}{3} = 60^0$
$sinx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cosx$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$tanx$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

2 زوايا المحاور:

$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

هذه الزوايا يتم حفظها من دائرة الوحدة حيث كل زوج يمثل (cos, sin)



لاحظ أن:

$cos(90°) = 0 \quad , \quad sin(90°) = 1$

$cos(\pi) = -1 \quad , \quad sin(\pi) = 0$

ملحوظة لتحويل الزاوية من درجات إلى راديان:

نضرب بـ $(\frac{\pi}{180°})$

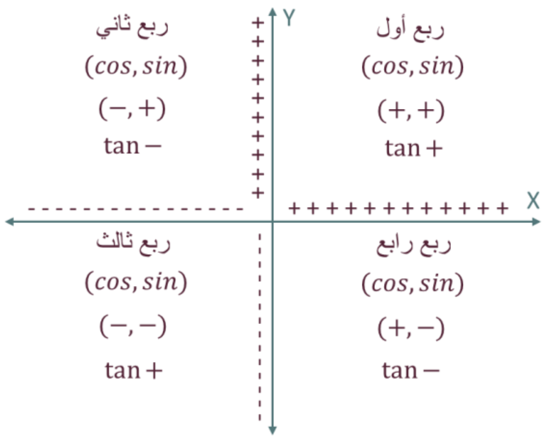
مثلاً: $120° = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

وللتحويل الزاوية من راديان إلى درجات

نعوض $\pi = 180°$

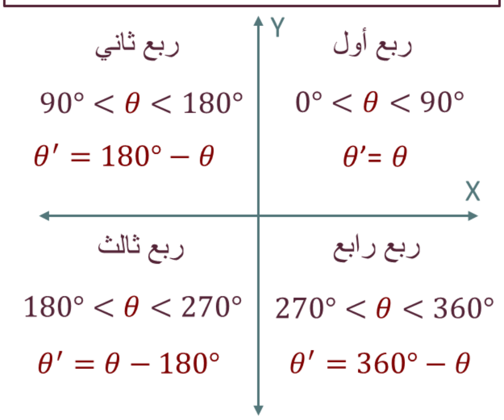
مثلاً: $\frac{4\pi}{3} = \frac{4(180)}{3} = 240°$

3 إشارة الاقترانات المثلثية في الأرباع الأربعة



4 قيمة الزاوية في الأرباع

إذا كانت θ : الزاوية
وكانت θ' : زاوية المرجع



5 إيجاد قيمة الاقترانات المثلثية:

مثال جد قيمة كل مما يلي:

(1) $\boldsymbol{cos}(\mathbf{120}°)$

نحدد الربع حيث $120°$ تقع في الربع الثاني

وبالتالي تكون إشارة cos سالبة، ثم نحدد زاوية

المرجع حيث:

$180° - 120° = 60° =$ مرجع

$$\rightarrow cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}$$

(2) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{135}°) = sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثاني

$180° - 135° = 45° =$ مرجع

(3) $\boldsymbol{cos}(\mathbf{225}°) = -cos(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثالث

$225° - 180° = 45° =$ **مرجع**

(4) $\boldsymbol{tan}(\mathbf{210}°) = tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ربع ثالث

$210° - 180° = 30° =$ **مرجع**

(5) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{300}°) = -sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ربع رابع

$360° - 300° = 60° =$ مرجع

(6) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{450}°)$

إذا زادت الزاوية عن $360°$ نقوم بطرح

دورة (360)

$$450° - 360° = 90°$$

$$sin(450°) = sin(90°) = 1$$

ملحوظة مهمة

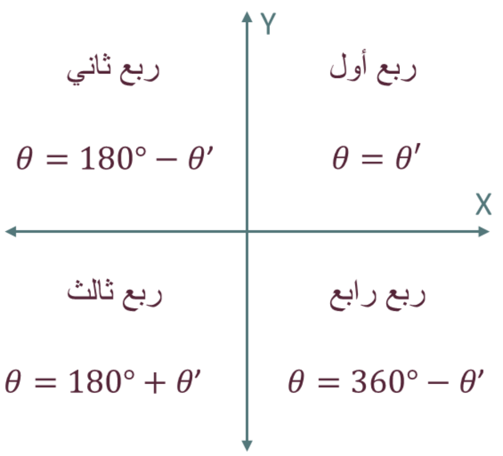
$$\boldsymbol{sin(-x) = -sin(x)}$$
$$\boldsymbol{cos(-x) = cos(x)}$$
$$\boldsymbol{tan(-x) = -tan(x)}$$

(7) $\boldsymbol{cos}(\mathbf{-60}°) = cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{sin}(\mathbf{-60}) = -sin(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boldsymbol{tan}(\mathbf{-60}) = -tan(60) = -\sqrt{3}$

6 الحالة العكسية

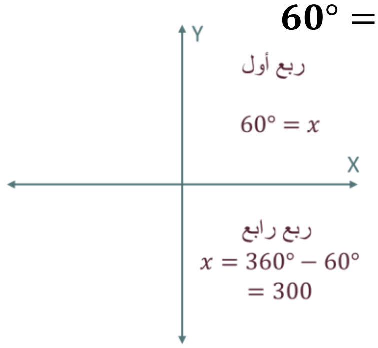


مثال جد حل المعادلات التالية:

(1) $\cos x = \frac{1}{2}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\cos$ موجب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $= 60°$



الحل الأولي:

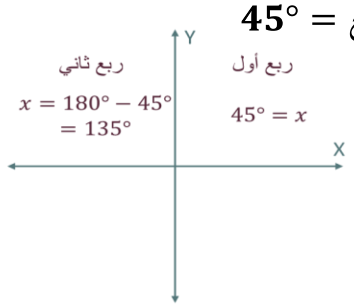
$x = 60°$

$x = 300°$

(2) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\sin$ موجب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $= 45°$



الحل الأولي:

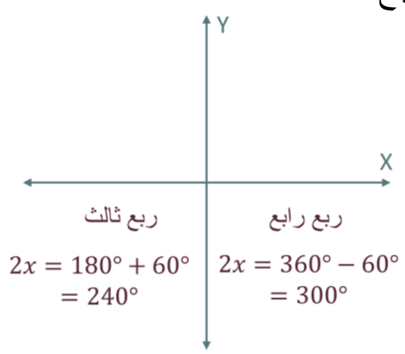
$x = 45°$

$x = 135°$

(3) $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\sin$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $= 60°$



الحل الأولي:

$2x = 240°$

$\to x = 120°$

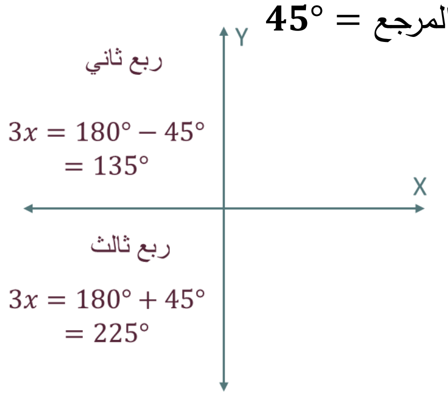
$2x = 300°$

$\to x = 150°$

(4) $\cos(3x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\cos$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $= 45°$



الحل الأولي:

$3x = 135°$

$\to x = 45°$

$3x = 225°$

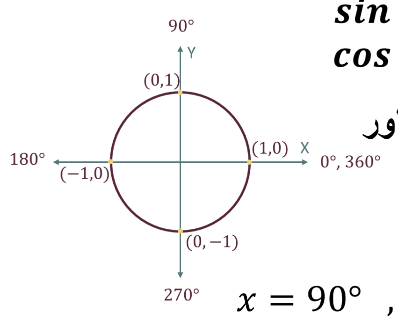
$\to x = 75°$

(5) $\cos x = 0$

ملحوظة مهمة

$\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} = \{-1, 0, 1\}$

تكون الزوايا محاور



الحل الأولي:

$x = 90° \quad , \quad x = 270°$

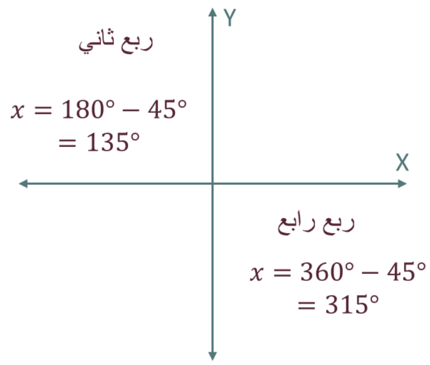
(6) $\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

(7) $\tan x = -1$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\tan$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $= 45°$



الحل الأولي:

$x = 135°$

$x = 315°$

التفاضل

Differentiation

الوحدة الأولى

الوحدة 1 تأسيس الاشتقاق
التفاضل

- النهايات والاتصال
- تعريف المشتقة
- قواعد الاشتقاق

مراجعة النهايات والاتصال

حالة 1 التعويض المباشر في النهاية عندما

يكون ناتج التعويض هو $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}\right)$ أو $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}\right)$

مثال جد قيمة النهايات التالية:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3)$

الحل

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3)=(2)^2+3=7$$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^3+5}{2x+1}\right)$

الحل

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+5}{2x+1}\right)=\frac{-1+5}{-2+1}=-4$$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+1}\right)$

الحل

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+1}\right)=\frac{0}{5}=0$$

حالة 2 إذا كان التعويض هو $\left(\frac{0}{0}\right)$ تكون

مشكلة وحلها نتبع الخطوات التالية:

1) تحليل إلى العوامل

2) الاختصار بين البسط والمقام

3) التعويض المباشر

مثال

جد قيمة النهايات التالية:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\qquad=\frac{0}{0}$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-5x}{x}\qquad=\frac{0}{0}$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2-5)}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-5)=-5$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{1-x^2}\qquad=\frac{0}{0}$

الحل

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{\cancel{(1-x)}(1+x)}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

حالة 3 عندما يكون ناتج التعويض في النهاية هو $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}\right)$

في هذه الحالة نبحث في إشارة الاقتران حول العدد الذي تقترب منه النهاية ونأخذ النهاية من اليمين واليسار فإذا كانت إشارة:

الاقتران موجبة ← جواب النهاية هو ∞

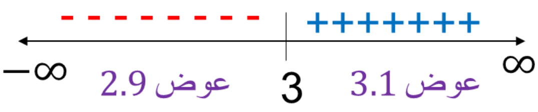
الاقتران سالبة ← جواب النهاية هو $-\infty$

مثال

جد قيمة النهايات التالية:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}$ $=\frac{6}{0}$

الحل نجد إشارة $\frac{2x}{x-3}$



$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=\infty$$

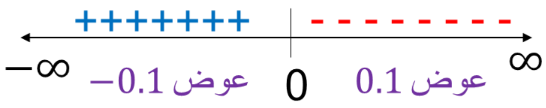
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}= \text{غير موجودة}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2}{x^{\frac{3}{5}}}$ $=\frac{-2}{0}$

الحل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}}$

نجد إشارة $\frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}}$



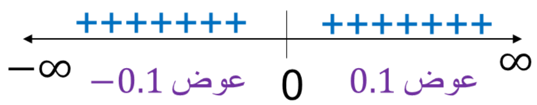
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}}=\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}}= \text{غير موجودة}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ $=\frac{1}{0}$

الحل نجد إشارة $\frac{1}{x^2}$



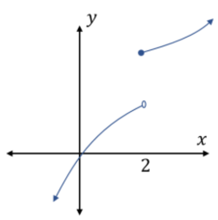
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$ غير موجودة

الاتصال

عن طريق الرسم

يكون الاقتران متصل إذا كان لا يحتوي على فجوات أو قفزات أو خطوط تقارب.

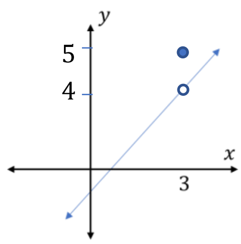
غير متصل عند $x = 2$



غير متصل عند $x = 3$

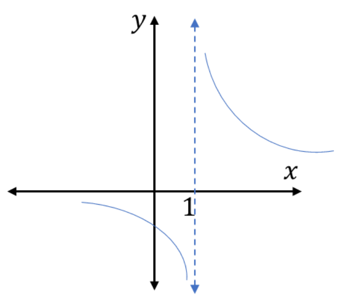
$f(3) = 5$ (عند الدائرة المغلقة)

ملحوظة وفي حالة لا يوجد دائرة مغلقة تكون غير معرفة $f(3)$



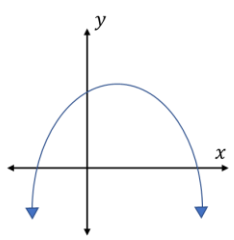
غير متصل

عند $x = 1$



متصل عند جميع النقاط

لكل $x \in R$



إذا علمت قاعدة الاقتران $f(x)$

نطبق تعريف الاتصال عند النقطة $x = a$

وله ثلاث شروط هي:

(1) $f(a)$ معرفة

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

النهاية = الصورة

مثال

ابحث في اتصال كل من الاقترانات التالية:

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2 \\ 3x - 1, & x < 2 \end{cases}$

عند $x = 2$ ؟

الحل

$* \ f(2) = (2)^2 + 1 = 5$ معرفة

انتبه « الصورة تعوّض عند المساواة

$* \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = 5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ موجودة

انتبه « يمين $x > 2$

يسار $x < 2$

$* \lim_{x\to2} f(x) = f(2)$

وبالتالي $f(x)$ متصل عند $x = 2$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ 2x+7, & x \geq 1 \end{cases}$

عند $x = 1$ ؟

الحل

$* f(1) = 2(1) + 7 = 9$ معرفة

$* \lim_{x\to1^+}(2x+7) = 9$

$\lim_{x\to1^-}(x^3) = 1$ $\neq$

$\lim_{x\to1} f(x) =$ غير موجودة

وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x = 1$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \neq 2 \\ 5 & , x = 2 \end{cases}$

عند $x = 2$ ؟

الحل

$* f(2) = 5$ معرفة

$* \lim_{x\to2}(x^2+4x) = 12$ موجودة

انتبه ≪ للصورة $x = 2$

للنهاية $x \neq 2$

$* \lim_{x\to2} f(x) \neq f(2)$

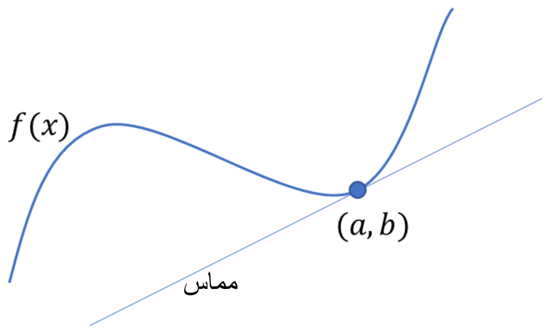
وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x = 2$

تعريف المشتقة

مفهوم المشتقة:

تعلمت في الأول الثانوي بأن المشتقة هي ميل المماس

ميل المماس $= f'(a)$



تعريف المشتقة هو

حفظ

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال

إذا كان $f(x) = x^2 + 3$ جد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة؟

الحل

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

نجد الصورة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{3} - \cancel{x^2} - \cancel{3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

بإخراج h عامل مشترك

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

بتعويض $h = 0$

$$= 2x + 0 \Longrightarrow f'(x) = 2x$$

مثال

إذا كان $f(x) = x^2 - 2x$ جد $f'(3)$ باستخدام تعريف المشتقة؟

الحل

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

نعوض $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

نجد الصورة

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - (9-6)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

بإخراج h عامل مشترك

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (4+h)$$

بتعويض $h = 0$

$$\Longrightarrow f'(3) = 4$$

مثال

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 3 \\ 3x + 1, & x \geq 3 \end{cases}$

جد $f'(3)$ باستخدام تعريف المشتقة؟

الحل

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

نعوض $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$\to f_+'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

نجد الصورة

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(3+h)+1-(10)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+3h-\cancel{9}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\Rightarrow f_+'(3) = 3$$

$$\to f_-'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

نجد الصورة

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+1-(10)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{9}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

بإخراج h عامل مشترك

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(6+h)$$

بتعويض $h = 0$

$$\Rightarrow f_-'(3) = 6$$

$$\Rightarrow f_+'(3) \neq f_-'(3)$$

وبالتالي $f'(3)$ غير موجودة أي أن $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x = 3$

انتبه « عند إيجاد $f(3)$ نعوض دائماً عند المساواة بغض النظر اننا نجد مشتقة من اليمين أو اليسار

قواعد الاشتقاق

تذكير إذا كان $y = f(x)$ فإنه يرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{أو} \quad f'(x) \quad \text{أو} \quad y'$$

قاعدة 1

إذا كان $f(x) = c$ حيث c : ثابت فإن:

$f'(x) = 0$ أي أن مشتقة الاقتران الثابت = صفر

مثال جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

(1) $f(x) = 3 \rightarrow\rightarrow f'(x) = 0$

(2) $f(x) = \frac{-4}{3} \rightarrow\rightarrow f'(x) = 0$

(3) $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \rightarrow\rightarrow g'(x) = 0$

(4) $h(x) = a^2 + 3b$ حيث a, b ثوابت

$\rightarrow\rightarrow h'(x) = 0$

قاعدة 2

إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$

أي أن $(x)^{\text{قوه}}$ فإن المشتقة هي:

(نزّل القوّة واطرح واحد)

مثال جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

(1) $f(x) = x^3 \rightarrow\rightarrow f'(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = x^{20} \rightarrow\rightarrow f'(x) = 20x^{19}$

(3) $f(x) = x \rightarrow\rightarrow f'(x) = 1$

مثال

(1) إذا كان $f(x) = x^4$ جد $f'(2)$ ؟

حتى نجد المشتقة عند نقطة (عدد) نجد أولاً المشتقة بشكل عام $f'(x)$ ثم بعد ذلك نعوّض العدد.

$f'(x) = 4x^3$

$\rightarrow f'(2) = 4(2)^3 = 4(8) = 32$

(2) إذا كان $f(x) = x^8$ جد $f'(-1)$ ؟

$f'(x) = 8x^7$

$\rightarrow f'(-1) = 8(-1)^7 = 8(-1)$

$= -8$

(3) إذا كان $y = x^6$ جد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل: $\frac{dy}{dx} = 6x^5$

(4) إذا كان $y = t^2$ جد $\frac{dy}{dt}$ ؟

الحل: $\frac{dy}{dt} = 2t$

(5) إذا كان $z = n^{12}$ جد $\frac{dz}{dn}$ ؟

الحل: $\frac{dz}{dn} = 12n^{11}$

ملحوظة مهمة عندما يظهر في الجواب أُس سالب أو أُس كسري نقوم بتحويله حسب قوانين الأسس حيث:

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ كذلك $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

مثال (تزبيط الجواب)

(1) إذا كان $f(x) = x^{-3}$ جد $f'(x)$ ؟

$$f'(x) = -3x^{-4} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

(2) إذا كان $f(x) = x^{-2}$ جد $f'(-2)$ ؟

$$f'(x) = -2x^{-3} \rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$\rightarrow f'(-2) = \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

(3) إذا كان $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ جد $f'(x)$ ؟

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\left(\frac{5}{3}-1\right)} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

ملحوظة

لطرح العدد (1) من الأس بطريقة سريعة.

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} - 1 = \boxed{\frac{\text{بسط} - \text{مقام}}{\text{مقام}}}$$

(4) إذا كان $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(4)$ ؟

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\rightarrow f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = \frac{3}{2}(2) = 3$$

(5) إذا كان $f(x) = x^{\frac{-1}{2}}$ جد $f'(9)$ ؟

$$f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$f'(9) = \frac{-1}{2\sqrt{(9)^3}} = \frac{-1}{2(\sqrt{9})^3} = \frac{-1}{2(3)^3} = \frac{-1}{54}$$

ملحوظة مهمة

إذا كان الاقتران مكتوب على صورة $f(x) = \frac{1}{x^n}$ نقوم بتجهيزه للاشتقاق على صورة $f(x) = x^{-n}$.

وإذا كان على صورة $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ نجهزه للاشتقاق على صورة $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ بما معناه يجب أن يكون الاقتران على صورة $(x)^{\text{قوة}}$ والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال

(1) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x^5}$ جد $f'(x)$ ؟

$f(x) = x^{-5}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = -5x^{-6} \rightarrow f'(x) = \frac{-5}{x^6}$ (تزبيط)

(2) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x^{-3}}$ جد $f'(x)$ ؟

$f(x) = x^3$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = 3x^2$ (تزبيط)

(3) إذا كان $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ جد $f'(x)$ ؟

$f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ (تزبيط)

(4) إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}$ جد $f'(4)$ ؟

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ (تزبيط)

$\rightarrow f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = \frac{3}{2}(2) = 3$

(5) إذا كان $f(x) = \sqrt[3]{x}$ جد $f'(-27)$ ؟

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (تزبيط)

$\rightarrow f'(-27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-27)^2}} = \frac{1}{3(9)} = \frac{1}{27}$

(6) إذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد $f'(x)$ ؟

$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{-1}{2}}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ (تزبيط)

مثال انتبه

(1) إذا كان $f(x) = c^3$ جد $f'(x)$ حيث (c) ثابت؟

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 3c^2 \leftarrow\leftarrow$ خطأ

(2) إذا كان $f(x) = \pi^3$ جد $f'(x)$ ؟

$f'(x) = 0$

نشتق حسب قاعدة (2)

عندما يكون الأساس متغير

قاعدة 3

إذا كان $f(x) = k.g(x)$ حيث (k) ثابت

فإن $f'(x) = k.g'(x)$

أي أن مشتقة (ثابت × اقتران) تساوي الثابت × مشتقة الاقتران

يبقى الثابت نفسه ونضرب في مشتقة الاقتران.

مثال توضيحي

$$f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 4(3x^2)$$
$$= 12x^2$$

وللسرعة نضرب الثابت في القوة ثم نطرح واحد.

مثال جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

(1) $f(x) = -5x^2 \rightarrow f'(x) = -10x$

(2) $f(x) = \frac{7}{3}x^4 \rightarrow f'(x) = \frac{28}{3}x^3$

(3) $f(x) = \frac{-5}{9}x^9 \rightarrow f'(x) = -5x^8$

(4) $f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$

(5) $f(x) = \frac{-3}{4}x \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{4}$

(6) $f(x) = \frac{-3}{x^5}$

$f(x) = -3x^{-5}$ (تجهيز)

$\rightarrow f'(x) = 15x^{-6} = \frac{15}{x^6}$ (تربيط)

ملحوظة مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}}\right) = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{عدد}}$

إذا كان $f(x) = \frac{g(x)}{c}$ فإن $f'(x) = \frac{g'(x)}{c}$ حيث c ثابت:

مثال جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

(1) $f(x) = \frac{x^3}{4} \rightarrow\rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{4}$

(2) $f(x) = \frac{2x^4}{5} \rightarrow\rightarrow f'(x) = \frac{8x^3}{5}$

(3) $f(x) = \frac{x}{2} \rightarrow\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$

قاعدة 4 قاعدة الجمع والطرح

إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

توزيع المشتقة على الجمع والطرح فقط.

لا يجوز توزيع المشتقة على الضرب والقسمة.

أي أنه إذا كان $f(x) = g(x).h(x)$

$$f'(x) \neq g'(x).h'(x)$$

وسيتم لاحقاً إعطاء قاعدة للضرب والقسمة.

مثال

(1) إذا كان $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

جد $f'(x)$ ؟

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$$

تم توزيع المشتقة على الجمع والطرح وذلك بتطبيق القواعد الأساسية الثلاثة السابقة.

(2) إذا كان $f(x) = 5x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} + 1$

جد $f'(x)$ ؟

$f(x) = 5x^3 - x^{\frac{1}{3}} + x^{-2} + 1$ (تجهيز)

$f'(x) = 15x^2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3}$ (بالاشتقاق)

$f'(x) = 15x^2 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3}$ (تزبيط)

(3) إذا كان $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1}{5}$ جد $f'(x)$ ؟

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + x}{5}$$

(4) إذا كان $f(x) = \frac{3\pi}{4}(x^3 - x^2 + 1)$

جد $f'(x)$ ؟

ثابت × اقتران ← يبقى الثابت ونشتق الاقتران

$$f'(x) = \frac{3\pi}{4}(3x^2 - 2x)$$

(5) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{x}} - x^3 + 1$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 1$ ؟

$y = 3x^{-\frac{1}{2}} - x^3 + 1$ (تجهيز)

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 3x^2$ (بالاشتقاق)

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2\sqrt{x^3}} - 3x^2$ (تزبيط)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-3}{2\sqrt{(1)^3}} - 3(1)^2$$

$$= \frac{-3}{2} - 3 = \frac{-3}{2} - \frac{3(2)}{1(2)} = \frac{-3}{2} - \frac{6}{2}$$

$$= \frac{-9}{2}$$

مثال

إذا كان $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$ جد أصفار $f'(x)$ ؟

$f'(x) = x^2 - 3x - 4$

$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x - 4 = 0 \quad or \quad x + 1 = 0$

$x = 4 \quad or \quad x = -1$

أصفار المشتقة هي $\{-1, 4\}$

ملحوظة مهمة

ممكن الإشارة بين اقترانين تكون ضرب، ولكنه قابل للدمج بإجراء عملية الضرب حيث تتحول الإشارة الى جمع وطرح والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال

(1) إذا كان $f(x) = x^2(x^3 - 4x + 1)$

جد $f'(x)$ ؟

بالدمج (تجهيز)

$$f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2$$
$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2x$$

(2) إذا كان $\boldsymbol{f(x) = (2x+1)(x^2-3)}$

جد $\boldsymbol{f'(x)}$ ؟

فك الأقواس (تجهيز)

$$f(x) = 2x^3 - 6x + x^2 - 3$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6 + 2x$$

ملحوظة

$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(f(x))}$ معناها مشتقة الاقتران $\boldsymbol{f(x)}$ بالنسبة للمتغير $\boldsymbol{(x)}$

مثال

(1) جد $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(x^5 - x^2 + 3x - 1)}$ ؟

$$\frac{d}{dx}(x^5 - x^2 + 3x - 1)$$
$$= 5x^4 - 2x + 3$$

(2) جد $\boldsymbol{\frac{d}{dt}(t^2 - t)}$ ؟

$$\frac{d}{dt}(t^2 - t) = 2t - 1$$

(3) إذا كان $\boldsymbol{f(x) = \frac{d}{dx}(2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1)}$

جد $\boldsymbol{f'(1)}$ ؟

$$f(x) = 8x^3 + x$$
$$f'(x) = 24x^2 + 1$$
$$f'(1) = 24(1)^2 + 1 = 25$$

مثال

إذا كان $\boldsymbol{f(x) = 2g(x) + x^2 - 3x + 1}$

وكان $\boldsymbol{f'(2) = 5}$ جد $\boldsymbol{g'(2)}$ ؟

بالاشتقاق للطرفين ينتج

$$f'(x) = 2g'(x) + 2x - 3$$

وبتعويض $x = 2$ ينتج:

$$f'(2) = 2g'(2) + 2(2) - 3$$
$$5 = 2g'(2) + 1$$
$$\rightarrow 4 = 2g'(2) \rightarrow g'(2) = \frac{4}{2} = 2$$

قاعدة 5 قاعدة اقتران أو قوس مرفوع لقوة.

إذا كان $f(x) = (g(x))^n$ فإن:

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

ثلاث خطوات:

- نزل القوة.
- اطرح منها واحد.
- نضرب بمشتقة ما داخل القوس.

مثال جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = (x^2-3)^5$

$f'(x) = 5(x^2-3)^4.(2x)$

$f'(x) = 10x(x^2-3)^4$

(2) $f(x) = (4x-2)^{-3}$

$f'(x) = -3(4x-2)^{-4}.(4)$

$f'(x) = \dfrac{-12}{(4x-2)^4}$ (تزبيط)

(3) $f(x) = (x^2-x+2)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2-x+2)^{\frac{1}{2}}.(2x-1)$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}(2x-1)\sqrt{x^2-x+2}$ (تزبيط)

مثال جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = \sqrt[3]{(5x-1)^2}$

$f(x) = (5x-1)^{\frac{2}{3}}$ (تجهيز)

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x-1)^{\frac{-1}{3}}.(5)$ (بالاشتقاق)

$f'(x) = \dfrac{10}{3.\sqrt[3]{5x-1}}$ (تزبيط)

(2) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+x+5}$

$f(x) = (x^2+x+5)^{\frac{1}{4}}$ (تجهيز)

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(x^2+x+5)^{\frac{-3}{4}}.(2x+1)$ (بالاشتقاق)

$f'(x) = \dfrac{2x+1}{4.\sqrt[4]{(x^2+x+5)^3}}$ (تزبيط)

(3) $f(x) = x^2 + \sqrt{(3-x)^5}$

$f(x) = x^2 + (3-x)^{\frac{5}{2}}$ (تجهيز)

$f'(x) = 2x + \dfrac{5}{2}(3-x)^{\frac{3}{2}}.(-1)$ (بالاشتقاق)

$f'(x) = 2x - \dfrac{5}{2}\sqrt{(3-x)^3}$ (تزبيط)

(4) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[7]{(2x-1)^2}}$

$f(x) = 4(2x-1)^{\frac{-2}{7}}$ (تجهيز)

$$f'(x) = \frac{-8}{7}(2x-1)^{\frac{-9}{7}}.(2)$$ (بالاشتقاق)

$$f'(x) = \frac{-16}{7.\sqrt[7]{(2x-1)^9}}$$ (تربيط)

ملحوظة مهمة

حالة خاصة (للجذور التربيعية فقط)

إذا كان $f(x) = \sqrt{g(x)}$ فإن $f'(x) = \frac{g'(x)}{2.\sqrt{g(x)}}$

أي أن مشتقة الجذر التربيعي تساوي:

$$\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر التربيعي}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$$

وبالتالي لا نحتاج إلى تجهيز أو تربيط

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال جد $f'(x)$ فيما يلي:

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+x-1}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2.\sqrt{x^2+x-1}}$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$$

(3) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

$$f'(x) = \frac{3}{2.\sqrt{3x-1}}$$

ملحوظة مهمة

$$f^n(x) = (f(x))^n$$

مثلاً

$$f^3(x) = (f(x))^3$$

$$g^2(x) = (g(x))^2$$

وبالتالي مشتقة $g^2(x)$ تساوي $2g(x).g'(x)$

مشتقة $f^3(x)$ تساوي $3(f(x))^2.f'(x)$

مثال

إذا كان $f(x) = x^2 + g^3(x)$ جد $f'(2)$ علماً بأن $g(2) = -1$ ، $g'(2) = 3$ ؟

الحل

$$f(x) = x^2 + (g(x))^3$$ (تجهيز)

$$f'(x) = 2x + 3(g(x))^2.g'(x)$$ (بالاشتقاق)

$$f'(2) = 2(2) + 3(g(2))^2.g'(2) \leftarrow x = 2$$

$$f'(2) = 4 + 3(-1)^2 \cdot (3) = 4 + 9 = 13$$