## 1 التأسيس قواعد الاشارات
### الأعداد

#### الضرب والقسمة

**متشابهين موجب**

$\oplus \times \oplus = \oplus$ | $\oplus \div \oplus = \oplus$

$\ominus \times \ominus = \oplus$ | $\ominus \div \ominus = \oplus$

**مختلفين سالب**

$\ominus \times \oplus = \ominus$ | $\ominus \div \oplus = \ominus$

$\oplus \times \ominus = \ominus$ | $\oplus \div \ominus = \ominus$

**مثال** أجد ناتج كل مما يأتي:

- $6 \times 8 = 48$ | $-9 \times 2 = -18$
- $-6 \times -8 = 48$ | $-19 \times 0 = 0$
- $\frac{-14}{7} = -2$ | $\frac{12}{-3} = -4$
- $\frac{-27}{-9} = 3$ | $-\frac{-6}{-2} = -3$

#### الجمع والطرح

**متشابهين نجمع، مختلفين نطرح**

**والحفاظ على إشارة الكبير**

**مثال** أجد ناتج كل مما يأتي:

- $5 + 9 = 14$ | $-7 - 4 = -11$
- $-8 + 11 = 3$ | $9 - 17 = -8$
- $-6 - (-8) = 2$ | $9 + (-6) = 3$
- $-7 - 0 = -7$ | $0 - 6 = -6$

الإشارات المتتالية تكون متشابهتين موجب، مختلفتين سالب

## تدريب

أجد ناتج كل مما يأتي:

(1) $-8 \times 9 =$

(2) $-8 - (-9) =$

(3) $\frac{-28}{-7} =$

## 2 التأسيس العمليات على الكسور
### الأعداد

#### الجمع والطرح

1) إذا كان يوجد علاقة بين المقامين

**مثال**

- $\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{2\times2}{2\times3} + \frac{7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$
- $\frac{2}{10} - \frac{7}{2} = \frac{2}{10} - \frac{5\times7}{5\times2} = \frac{2}{10} - \frac{35}{10} = \frac{-33}{10}$

2) عندما لا يوجد علاقة بين المقامين

نتبع طريقة المقص (مقامين ثم قطرين)

$$\frac{a}{b} \overset{+}{\underset{\times}{\times}} \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

**مثال**

- $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21+10}{35} = \frac{31}{35}$
- $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} = \frac{35-12}{15} = \frac{23}{15}$

## الضرب والقسمة

❖ **في حالة الضرب**

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ نضرب البسطين ونضرب المقامين.

**مثال**

- $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$
- $\frac{4}{11} \times \frac{-2}{5} = \frac{4}{11} \times \frac{-2}{5} = \frac{-8}{55}$

❖ **في حالة القسمة**

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(البسط: $\frac{a}{b}$، المقام: $\frac{c}{d}$)

تحويل القسمة إلى ضرب حيث نقلب المقام.

**مثال**

1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

2) $\frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$$\rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$$

3) $\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$$\rightarrow \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}$$

**تدريب** أجد ناتج كل مما يأتي:

(1) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} =$

(2) $\frac{5}{\frac{2}{3}} =$

(3) $\frac{8}{9} - \frac{2}{5} =$

## 3 التأسيس الأسس
الأعداد والحدود الجبرية

$(\ )^n$ الأس هو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه

$(4)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$(2)^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

**انتبه**

سالب $=$ (سالب)$^{\text{فردي}}$ ، موجب $=$ (سالب)$^{\text{زوجي}}$

$(-1)^{95} = -1$ ، $(-1)^{100} = 1$

$\sqrt[n]{\ }$ الجذر هو عدد ما إذا ضُرب بنفسه عدد من المرات (دليل الجذر) يصبح العدد الأصلي

$\sqrt{36} = \sqrt{6 \times 6} = 6$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$

$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{-1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1} = -1$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$

**انتبه**

الجذر الزوجي لا يمكن أن يكون بداخله عدد سالب

✪ الأُسس في حالة الضرب تجمع بشرط أن تكون الأساسات متساوية

$$x^n . x^m = x^{(n+m)}$$

**مثال**

1) $x^2 . x^3 = x^5$
2) $x^5 . x^{-2} = x^3$

✪ الأُسس في حالة القسمة تطرح بشرط أن تكون الأساسات متساوية

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{(n-m)}$$

**مثال**

1) $\frac{x^7}{x^2} = x^5$
2) $\frac{x^{a+4}}{x^4} = x^{(a+4-4)} = x^a$

✪ الأُس السالب بنزل على المقام يصبح موجب

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

**مثال**

1) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
2) $(3)^{-2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$

✪ عندما يكون هنالك مقدار عليه أُس مرفوع إلى أُس فإن الأُس الناتج يكون حاصل ضرب الأُسس

$$(x^n)^m = x^{(n \times m)}$$

**مثال**

1) $(x^2)^3 = x^{(2\times 3)} = x^6$
2) $(x^{12})^{\frac{1}{3}} = x^{\left(12\times\frac{1}{3}\right)} = x^4$

✪ يوزع الأُس على الضرب والقسمة ولا يوزع على الجمع والطرح

$$(x.y)^n = x^n . y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n \quad \text{ولكن}$$

**مثال**

1) $\left(x(y-1)\right)^2 = x^2 . (y-1)^2$
2) $x^3 . y^3 = (xy)^3$
3) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^3 = \frac{x^3}{(x-1)^3}$
4) $\frac{(x+1)^5}{(x-3)^5} = \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^5$

✪ أي عدد مرفوع للأُس (صفر) يكون الجواب (واحد) بشرط أن الأساس لا يساوي (صفر)

$$x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$$

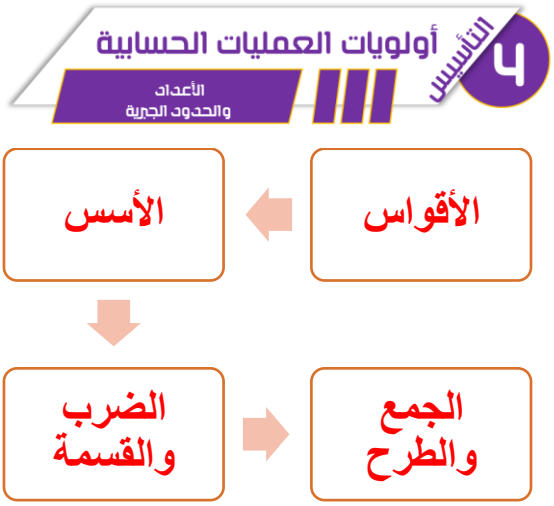
**مثال**

1) $(3)^0 = 1$
2) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1$

✪ الأسس النسبية $\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$

**مثال**

1) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$
2) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$
3) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
4) $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$
5) $x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$
6) $(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
7) $(-27)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(-27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-27}} = -\frac{1}{3}$




**مثال** أجد ناتج ما يلي:

**(1)** $\mathbf{2(1-5)^2-7}$

**الحل:**

$= 2(-4)^2 - 7$
$= 2(16) - 7$
$= 32 - 7 = 25$

**(2)** $\mathbf{60 \times (10-(4+3))}$

**الحل:**

$= 60 \times (10-7) = 60 \times 3 = 180$

**(3)** $\mathbf{5(-3)^2+10}$

**الحل:**

$= 5(9) + 10 = 45 + 10 = 55$

**(4)** $\frac{\mathbf{5(7-2)^2}}{\mathbf{(4)^2+\sqrt{81}}} - \mathbf{1.2}$

**الحل:**

$= \frac{5(5)^2}{16+9} - 1.2 = \frac{5(25)}{25} - 1.2$

$= 5 - 1.2 = 5 - \frac{12}{10}$

$= \frac{5 \times 5}{1 \times 5} - \frac{6}{5} = \frac{25}{5} - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}$

**(5)** $\mathbf{(85-2^3)-\left(3^2-8\times\frac{3}{4}\right)}$

**الحل:**

$= (85-8) - \left(9 - 8 \times \frac{3}{4}\right)$
$= (77) - (9 - 2 \times 3)$
$= (77) - (9-6) = 77 - 3 = 74$

**تدريب** أجد ناتج $\mathbf{23 - 5(3)^2 - \sqrt[3]{64}}$

التأسيس 5

## العمليات على الحدود الجبرية

### الحدود الجبرية

### جمع وطرح المقادير الجبرية

يكون الجمع والطرح للحدود المتشابهة فقط حيث

نجمع ونطرح المعاملات.

**مثال**

1) $3x + 2x = 5x$
2) $4x^2 - x^2 = 3x^2$
3) $x - 5x = -4x$
4) $-2x^3 - 5x^3 = -7x^3$
5) $2x + x^2$ لا يجوز الجمع
6) $2x + y^2$ لا يجوز الجمع
7) $3x - 2x^2 + 5x + 6x^2 = \boxed{8x + 4x^2}$ ← أبسط صورة

### ضرب المقادير الجبرية

الأسس في حالة الضرب تجمع والمعاملات تضرب.

**مثال**

1) $(2x)(3x) = 6x^2$
2) $(5x)(-3x^2) = -15x^3$
3) $(-4x^2)(-3x^3) = 12x^5$
4) $(-3y^2)(-2xy) = 6xy^3$

### قسمة المقادير الجبرية

الأسس في حالة القسمة تطرح والمعاملات تقسم.

**مثال**

1) $\frac{x^2}{x} = x \quad , x \neq 0$
2) $\frac{8x^3}{2x} = 4x^2 \quad , x \neq 0$

عند الاختصار بين البسط والمقام يجب أن تكون الإشارات ضرب

3) $\frac{\cancel{x}(x^2+5)}{\cancel{x}} = x^2 + 5$

خطأ شائع $\frac{x^2+3\cancel{x}}{\cancel{x}}$

### فك الأقواس

نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح.

**مثال**

1) $x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$
2) $(x^2 - 3x)(2x + 5)$
$= 2x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 15x$

بتجميع الحدود المتشابهة

$= 2x^3 - x^2 - 15x$

3) $(2x - 6)(5 - 2x)$
$= 10x - 4x^2 - 30 + 12x$

بتجميع الحدود المتشابهة والترتيب

$= 2x^3 - x^2 - 15x$

## انتبه

**قاعدة فك التربيع:**

$$(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

مربع الاول + 2 × الأول × الثاني + مربع الثاني

$$(x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

## مثال

1) $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

2) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

3) $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

4) $(3x+4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$

## توحيد مقامات

## مثال

(1) $\frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x-2}$

$= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3x+6}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{x-3x-6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-6}{x^2-4}$

(2) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+3}$

$= \frac{3(x+3) + x(x-1)}{(x-1)(x+3)}$

$= \frac{3x+9+x^2-x}{(x-1)(x+3)}$

$= \frac{x^2+2x+9}{x^2+2x-3}$

(3) $\frac{2x}{x+2} - \frac{4}{x-1}$

$= \frac{2x(x-1) - 4(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$= \frac{2x^2-2x-4x-8}{(x+2)(x-1)}$

$= \frac{2x^2-6x-8}{x^2+x-2}$

# 6 التأسيس المعادلات الخطية

## المعادلات

❖ **المعادلة الخطية بمتغير واحد**

## مثال

**أجد حل المعادلات التالية**

(1) $x + 10 = -15$

$x = -15 - 10 = -25$

(2) $x - 2 = 5$

$x = 5 + 2 = 7$

(3) $12M = 24$

$M = \frac{24}{12} = 2$

(4) $\frac{y}{5} = 7$

$y = 7 * 5 = 35$

(5) $2y + 3 = 5$

$2y = 5 - 3 \rightarrow 2y = 2$

$$y=\frac{2}{2}\rightarrow y=1$$

(6) $\frac{x}{3}-6=15$

$$\frac{x}{3}=15+6\rightarrow \frac{x}{3}=21$$

$$y=21*3\rightarrow y=63$$

(7) $7t-6=3t+14$

$$7t-3t=14+6$$

$$4t=20\rightarrow t=5$$

(8) $\frac{2x-8}{3}-1=5$

$$\frac{2x-8}{3}=5+1$$

$\frac{2x-8}{3}=\frac{6}{1}$ بالضرب تبادلي

$$2x-8=18\rightarrow 2x=26\rightarrow x=13$$

(9) $2y+3y-15=6y-9$

$$5y-15=6y-9$$

$$5y-6y=-9+15$$

$$-y=6\rightarrow y=-6$$

## ٦ التأسيس التحليل إلى العوامل
### الحدود الجبرية

### فرق بين مربعين

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

قوسين متشابهين مختلفين في الإشارة.

حيث نأخذ الجذر التربيعي للحد الأول والجذر التربيعي للحد الثاني.

**مثال**

(1) $x^2-4=(x-2)(x+2)$

(2) $9-x^2=(3-x)(3+x)$

(3) $4x^2-25=(2x-5)(2x+5)$

(4) $\frac{1}{16}x^2-49=(\frac{1}{4}x-7)(\frac{1}{4}x+7)$

(5) $x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

(6) $x^2-7=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

(7) $x^2+4\rightarrow$ مجموع مربعين (لا تحلل)

(8) $81+x^2\rightarrow$ مجموع مربعين (لا تحلل)

### فرق ومجموع بين مكعبين

**فرق بين مكعبين**

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

القوس الصغير= نأخذ الجذر التكعيبي للحد الأول والثاني، مع الحفاظ على نفس إشارة المقدار.

القوس الكبير= (مربع الأول ثم عكس الإشارة ثم الاول × الثاني ثم مربع الثاني)

**مجموع بين مكعبين**

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

**مهم** القوس الأكبر دائما لا يحلل (مميزه سالب)

**مثال**

(1) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

(2) $x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$

**مثال** حل المعادلات التالية:

*(1)* $x^2 - 4 = 0$

**طريقة 1**

$$(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 2 \quad or \quad x = -2$$

**طريقة 2**

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

*(2)* $2x^2 - 6 = 0 \rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{6}{2}$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

*(3)* $x^2 + 1 = 0$

عبارة تربيعية لا تحلل

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي

*(4)* $x^3 - 64 = 0$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{64} \rightarrow x = 4$$

*(5)* $x^3 + 27 = 19 \rightarrow x^3 = 19 - 27$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8} \rightarrow x = -2$$

## العبارة تربيعية ثلاثية الحدود

$ax^2 + bx + c$

**حالة 1**

عندما $a = 1$ أي أن معامل $x^2$ يساوي *(1)*

**مثال** حلل ما يلي إلى عواملة الأولية:

*(1)* $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

عددين حاصل ضربهما 4 والفرق بينهما 3 هما 1, 4

**توضيح إشارة القوسين**

في القوس الأول نقوم بإنزال نفس إشارة الحد الأوسط وفي القوس الثاني نقوم بضرب إشارة الأوسط في إشارة الحد الأخير.

**انتبه** ضع العدد الأكبر دائماً في القوس الأول.

*(2)* $x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 الفرق بينهما 4 هما 2, 6

*(3)* $x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 7 هما 3, 4

*(4)* $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 8 هما 2, 6

*(5)* $x^2 + 26x - 27 = (x+27)(x-1)$

عددين حاصل ضربهما 27 والفرق بينهما 26 هما 1, 27

**مثال** حل المعادلات التالية:

*(1)* $x^2 + 5x = 6$

يجب أولاً جعل المعادلة $= 0$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$\rightarrow (x+6)(x-1) = 0$$
$$x + 6 = 0 \quad or \quad x - 1 = 0$$
$$x = -6 \quad or \quad x = 1$$
$$x = \{-6, 1\}$$

نقل الطرف الأيمن للطرف الأيسر لجعل المعادلة تساوي صفر

(2) $2x = -x^2 + 15$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$\rightarrow (x+5)(x-3) = 0$

$x + 5 = 0 \quad or \quad x - 3 = 0$

$x = -5 \quad or \quad x = 3$

$x = \{-5, 3\}$

**ملحوظة** في حالة أن العبارة التربيعية لا تحلل إلى أقواس نلجأ للمميز والقانون العام.

| المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ | | |
|---|---|---|
| **سالب** | **صفر** | **موجب** |
| لا يوجد حل حقيقي | $x = \frac{-b}{2a}$ | $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ |

(3) $x^2 + x = 3 \rightarrow x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-3) = 13$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

(4) $x^2 + 2x + 3 = 0$

$\rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(3) = -8$ لا تحلل

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي

**حالة 2** عندما $a \neq 1$ معامل $x^2$ لا يساوي (1)

**مثال** حلل ما يلي الى عوامله الأولية:

(1) $2x^2 + 5x - 3$

معامل $x^2$ بنعطيه للثابت $x^2 + 5x - (3 \times 2)$

الآن بحلل مثل حالة 1 $x^2 + 5x - 6$

$(x+6)(x-1)$

بقسمة الحد الثابت بالقوس على معامل $x^2$ الأصلي

إذا كانت تقبل القسمة بقسمهم، لا تقبل القسمة بعطي المعامل لـ $x$

$\left(x + \frac{6}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$(x+3)(2x-1)$

$\rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x-1)$

(2) $3x^2 + 16x - 12$

$= x^2 + 16x - 36$

$= (x+18)(x-2)$

$= (x+6)(3x-2)$

(3) $5x^2 - 11x + 2$

$= x^2 - 11x + 10$

$= (x-10)(x-1)$

$= (x-2)(5x-1)$

## إخراج عامل مشترك

نقوم بإخراج الأس الأصغر عامل مشترك عندما لا يوجد حد مطلق (حد ثابت).

**مثال** حلل ما يلي الى عوامله الأولية:

(1) $x^2 - 3x = x(x-3)$

(2) $5x + 10x^2 = 5x(1+2x)$

(3) $x^3 - 4x = x(x^2-4)$
$= x(x-2)(x+2)$

(4) $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2-3x+2)$
$= x(x-2)(x-1)$

(5) $x^2 - 4x^3 = x^2(1-4x)$

## ٦ التأسيس الاقترانات

### صورة الاقتران

إيجاد صورة الاقتران أي تعويض القيمة المعطاة لـ $x$

جد صورة الاقتران إزاء كل قيمة معطاة

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x + 4 \quad , x = 2$

$f(2) = 2(2^3) - 3(2) + 4 = 16 - 6 + 4 = 14$

(2) $f(x) = \frac{13-x}{7x} \quad , x = -1$

$f(-1) = \frac{13-(-1)}{7(-1)} = \frac{14}{-7} = -2$

(3) $f(x) = -x - x^2 - x^3 \quad , x = -3$

$f(-3) = -(-3) - (-3)^2 - (-3)^3$

$= 3 - 9 - -27 = -6 + 27 = 21$

**مثال** إذا كان $f(x) = 2px^2 + 3$ وكان $f(2) = 15$ جد قيمة الثابت $p$ ؟

الحل:

$f(2) = 2p(2)^2 + 3 = 15$

$2p(4) + 3 = 15 \rightarrow 8p + 3 = 15$

$8p = 12 \rightarrow p = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

**مثال** إذا كان $f(x) = x^3 - 27$ وكان $f(a) = 98$ جد قيمة الثابت $a$ ؟

الحل:

$f(a) = a^3 - 27 = 98$

$a^3 = 125 \rightarrow \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{125}$

$\rightarrow a = 5$

**مثال** إذا كان $f(x) = 4x^2 - 1$ وكان $f(a) = 3a^2$ جد قيمة الثابت $a$ حيث $a > 0$ ؟

الحل:

$f(a) = 4a^2 - 1 = 3a^2$

$4a^2 - 3a^2 = 1 \rightarrow a^2 = 1$

$\rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{1}$

$\rightarrow a = \pm 1$

ولكن $a = -1$ تهمل لأن $a$ موجبة

وبالتالي قيمة الثابت $a$ هي 1

أي أن $a = 1$