الجزء 1 قواعد الإشارات
التأسيس

الضرب والقسمة

متشابهين موجب، مختلفين سالب

مثال أجد ناتج كل مما يأتي:

- $-9 \times 2 = -18$
- $-19 \times 0 = 0$
- $\frac{12}{-3} = -4$
- $-\frac{-6}{-2} = -3$
- $6 \times 8 = 48$
- $-6 \times -8 = 48$
- $\frac{-14}{7} = -2$
- $\frac{-27}{-9} = 3$

الجمع والطرح

متشابهين نجمع، مختلفين نطرح

والحفاظ على إشارة الكبير

مثال أجد ناتج كل مما يأتي:

- $-7 - 4 = -11$
- $9 - 17 = -8$
- $9 + (-6) = 3$
- $0 - 6 = -6$
- $5 + 9 = 14$
- $-8 + 11 = 3$
- $-6 - (-8) = 2$
- $-7 - 0 = -7$

الإشارات المتتالية تكون متشابهتين موجب، مختلفتين سالب

تدريب أجد ناتج كل مما يأتي:

(1) $-8 \times 9 =$

(2) $-8 - (-9) =$

(3) $\frac{-28}{-7} =$

الجزء 2 الأعداد الحقيقية
التأسيس

1 المقادير المعرفة وغير المعرفة

2 حل المعادلات باستخدام الجذور

المقادير المعرفة وغير المعرفة

كل عدد معرف هو عدد حقيقي، ولكن متى يكون غير معرف؟

الجواب يكون المقدار غير معرف في 3 حالات هي:

a. عندما يكون المقام = صفر

b. عندما يكون جذر زوجي وبداخله عدد سالب

$\sqrt[\text{زوجي}]{\text{سالب}}$

c. $\ln x$ عندما $x \le 0$

ملحوظة

(∞) كذلك $(-\infty)$ أعداد غير معرفة

توضيح ما سبق:

a) $\frac{0}{0}$, $\frac{4}{0}$, $\frac{-3}{0}$, $\frac{2}{0}$

جميع المقادير غير معرفة لأن المقام = 0

بما في ذلك $\frac{0}{0}$

ولكن انتبه $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$ مثلاً $\frac{0}{3} = 0$

b) $\sqrt[6]{1} = 1$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt{4} = 2$

$\sqrt[4]{-16} =$ غير معرف , $\sqrt{-4} =$ غير معرف

$\sqrt[6]{-1} =$ غير معرف

بينما الجذور الفردية دائماً معرفة

$\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[5]{32} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[7]{-1} = -1$

انتبه

$\sqrt{-x}$ بداخل الجذر الزوجي سالب، ولكن ليس معنى ذلك

أنه غير معرف لأن (x) متغير وليس عدد ثابت.

عندما x سالبة يكون ما داخل الجذر موجب وبالتالي معرف

كل مما يلي أعداد حقيقية:

$$3 , \frac{5}{2} , -4 , -\frac{2}{7} , \sqrt{5} , \sqrt[3]{-2} , 0.3 , -0.35$$

كل مما يلي أعداد غير حقيقية:

$$\sqrt{-3} , \frac{2}{0} , \frac{0}{0} , \ln 0 , \ln -3$$

حل المعادلات باستخدام الجذور

عند حل معادلة إذا كان الأُس زوجي في حالة المساواة مع عدد موجب يوجد حلين للمعادلة، وإذا كان الأُس فردي يوجد حل واحد، والأمثلة التالية توضح ذلك:

سؤال جد حل المعادلات التالية:

(1) $x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

(2) $x^4 = 16$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x = \pm 2$

(3) $x^6 = 1$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[6]{1} \rightarrow x = \pm 1$

(4) $x^3 = 8$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

(5) $x^3 = -8$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

(6) $x^5 = -32$

$\rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$

تحذير هام

عند السؤال عن الجذر (الجذر موجود بالأصل)

فإن يكون حل واحد فقط مثل:

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$

خطأ شائع $\sqrt{4} = \pm 2$

الجزء 3 أولويات العمليات الحسابية

التأسيس

الأقواس ← الأسس ← الضرب والقسمة ← الجمع والطرح

مثال أجد ناتج ما يلي:

(1) $2(1-5)^2-7$

الحل:

$= 2(-4)^2 - 7$

$= 2(16) - 7$

$= 32 - 7 = 25$

(2) $60 \times \big(10-(4+3)\big)$

الحل:

$= 60 \times (10-7) = 60 \times 3 = 180$

(3) $5(-3)^2 + 10$

الحل:

$= 5(9) + 10 = 45 + 10 = 55$

(4) $\frac{5(7-2)^2}{(4)^2+\sqrt{81}} - 1.2$

الحل:

$= \frac{5(5)^2}{16+9} - 1.2 = \frac{5(25)}{25} - 1.2$

$= 5 - 1.2 = 3.8$

(5) $(85-2^3) - \left(3^2 - 8 \times \frac{3}{4}\right)$

الحل:

$= (85-8) - \left(9 - \cancel{8} \times \frac{3}{\cancel{4}}\right)$

$= (77) - (9 - 2 \times 3)$

$= (77) - (9-6) = 77 - 3 = 74$

تدريب أجد ناتج $23 - 5(3)^2 - \sqrt[3]{64}$

الجزء 4 قوانين الأسس

التأسيس

1) الأُسس في حالة الضرب تجمع بشرط أن تكون الأساسات متساوية $x^n . x^m = x^{(n+m)}$

مثال

(1) $x^2 . x^3 = x^5$

(2) $x^5 . x^{-2} = x^3$

2) الأُسس في حالة القسمة تطرح بشرط أن تكون الأساسات متساوية $\frac{x^n}{x^m} = x^{(n-m)}$

مثال

(1) $\frac{x^7}{x^2} = x^5$

(2) $\frac{x}{x^3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

3) الأُس السالب ينزل على المقام يصبح موجب

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

(1) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

(2) $(3)^{-2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$

ملحوظة

الأُس هو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه

$(4)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$(2)^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

مثال

$(\text{سالب})^{\text{فردي}} =$ سالب ، $(\text{سالب})^{\text{زوجي}} =$ موجب

$(-1)^{95} = -1$ ، $(-1)^{100} = 1$

4) عندما يكون هنالك مقدار مرفوع إلى قوتين فإن الأس الناتج يكون حاصل ضرب القوتين.

$$(x^n)^m = x^{(n\times m)}$$

مثال

(1) $(x^2)^3 = x^{(2\times 3)} = x^6$

(2) $(x^{12})^{\frac{1}{3}} = x^{\left(12\times\frac{1}{3}\right)} = x^4$

5) توزيع الأُس على الضرب والقسمة ولا يوزع على الجمع والطرح $(x.y)^n = x^n.y^n$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

ولكن $(x \pm y)^n \neq (x^n \pm y^n)$

مثال

(1) $(x(y-1))^2 = x^2.(y-1)^2$

(2) $x^3.y^3 = (xy)^3$

(3) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^3 = \frac{x^3}{(x-1)^3}$

6) أي عدد مرفوع للأُس (صفر) يكون الجواب (واحد) بشرط أن الأساس لا يساوي (صفر)

$$x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$$

مثال

(1) $(3)^0 = 1$

الجزء 5
العمليات على المقادير الجبرية
التأسيس

1 جمع وطرح المقادير الجبرية
2 ضرب المقادير الجبرية
3 فك الأقواس
4 الكسور وتوحيد المقامات

جمع وطرح المقادير الجبرية

يكون الجمع والطرح **للحدود المتشابهة فقط** حيث نجمع ونطرح المعاملات.

مثال

(1) $3x + 2x = 5x$

(2) $4x^2 - x^2 = 3x^2$

(3) $x - 5x = -4x$

(4) $-2x^3 - 5x^3 = -7x^3$

(5) $2x + x^2$ لا يجوز الجمع

(6) $2x + y^2$ لا يجوز الجمع

أبسط صورة

(7) $3x - 2x^2 + 5x + 6x^2 = \boxed{8x + 4x^2}$

(2) $\left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1$

(3) $(-2)^0 = 1$

7) الأسس النسبية $\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$

مثال

(1) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

(2) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

(3) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1}$

(4) $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$

(5) $x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$

(6) $(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(7) $(16)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(16)^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3$
$= 4^3 = 64$

(8) $(27)^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{(27)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

ضرب المقادير الجبرية

الأسس في حالة الضرب تجمع والمعاملات تضرب.

مثال

(1) $(2x)(3x) = 6x^2$

(2) $(5x)(-3x^2) = -15x^3$

(3) $(-4x^2)(-3x^3) = 12x^5$

(4) $(-3y^2)(-2xy) = 6xy^3$

فك الأقواس

نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح.

مثال

(1) $x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$

(2) $(x^2 - 3x)(2x + 5)$

$= 2x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 15x$

بتجميع الحدود المتشابهة

$= 2x^3 - x^2 - 15x$

(3) $(2x - 6)(5 - 2x)$

$= 10x - 4x^2 - 30 + 12x$

بتجميع الحدود المتشابهة والترتيب

$= 2x^3 - x^2 - 15x$

انتبه

قاعدة فك التربيع:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

مربع اول $\pm$ $2 \times$ الأول $\times$ ثاني $+$ مربع ثاني

مثال

(1) $(x + 3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(2) $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

(3) $(-3 - 2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$

(4) $(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)^2$

$= (x + 2)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 8x + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

الكسور وتوحيد المقامات

❖ في حالة الضرب

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

نضرب البسطين ونضرب المقامين.

مثال

(1) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

(2) $\frac{3}{10} \times \frac{-1}{5} = \frac{-3}{50}$

(3) $\frac{x}{x-1} \times \frac{x+2}{x-3} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x-3)}$

$$= \frac{x^2+2x}{x^2-3x-x+3} = \frac{x^2+2x}{x^2-4x+3}$$

❖ في حالة القسمة

البسط

المقام

$$\frac{\boxed{\frac{a}{b}}}{\boxed{\frac{c}{d}}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

تحويل القسمة إلى ضرب حيث نقلب المقام.

مثال

(1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

(2) $\frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$$\boxed{\rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}}$$

(3) $\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$$\boxed{\rightarrow \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{b}}$$

❖ في حالة الجمع والطرح.

a) عندما يوجد علاقة بين المقامين.

مثال

(1) $\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{2\times2}{2\times3} + \frac{7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$

(2) $\frac{3}{10} - \frac{7}{2} = \frac{3}{10} - \frac{5\times7}{5\times2}$

$$= \frac{3}{10} - \frac{35}{10} = \frac{-32}{10} = \frac{-16}{5}$$

(3) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3}{x-2}$

$$= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{3x+6}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-3x-6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-6}{x^2-4}$$

b) عندما لا يوجد علاقة بين المقامين.

نتبع طريقة المقص (مقامين ثم قطرين)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

مثال

(1) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{21+10}{35} = \frac{31}{35}$

(2) $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} = \frac{35-12}{15} = \frac{23}{15}$

(3) $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+3}$

$$= \frac{3(x+3)+x(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{3x+9+x^2-x}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+2x+9}{x^2+2x-3}$$

(4) $\frac{2x}{x+2} - \frac{4}{x-1}$

$$= \frac{2x(x-1)-4(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-4x-8}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-6x-8}{x^2+x-2}$$

الجزء 6 المعادلات الخطية
التأسيس

❖ المعادلة الخطية بمتغير واحد

مثال أجد حل المعادلات التالية

(1) $\boldsymbol{x + 10 = -15}$

$$x = -15 - 10 = -25$$

(2) $\boldsymbol{x - 2 = 5}$

$$x = 5 + 2 = 7$$

(3) $\boldsymbol{12M = 24}$

$$M = \frac{24}{12} = 2$$

(4) $\boldsymbol{\frac{y}{5} = 7}$

$$y = 7 * 5 = 35$$

(5) $\boldsymbol{2y + 3 = 5}$

$$2y = 5 - 3 \rightarrow 2y = 2$$

$$y = \frac{2}{2} \rightarrow y = 1$$

(6) $\boldsymbol{\frac{x}{3} - 6 = 15}$

$$\frac{x}{3} = 15 + 6 \rightarrow \frac{x}{3} = 21$$

$$y = 21 * 3 \rightarrow y = 63$$

(7) $\boldsymbol{7t - 6 = 3t + 14}$

$$7t - 3t = 14 + 6$$

$$4t = 20 \rightarrow t = 5$$

(8) $\boldsymbol{\frac{2x-8}{3} - 1 = 5}$

$$\frac{2x-8}{3} = 5 + 1$$

$$2x - 8 = 18 \rightarrow 2x = 26 \rightarrow x = 13$$

(9) $\boldsymbol{2y + 3y - 15 = 6y - 9}$

$$5y - 15 = 6y - 9$$

$$5y - 6y = -9 + 15$$

$$-y = 6 \rightarrow y = -6$$

تدريب أجد حل المعادلة التالية:

$$\boldsymbol{2x - \frac{3}{2} = 3x - \frac{7}{2}}$$

الجزء ٦ التحليل إلى العوامل
التأسيس

1. فرق بين مربعين
2. فرق ومجموع مكعبين
3. عبارة تربيعية ثلاثية الحدود
4. إخراج عامل مشترك

فرق بين مربعين

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

قوسين متشابهين مختلفين في الإشارة.

مثال

(1) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

(2) $9 - x^2 = (3-x)(3+x)$

(3) $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$

(4) $\frac{1}{16}x^2 - 49 = (\frac{1}{4}x - 7)(\frac{1}{4}x + 7)$

(5) $x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

(6) $x - 5 = (\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})$

(7) $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16)$

$= 2(x-4)(x+4)$

(8) $x^2 + 4 \rightarrow$ مجموع مربعين (لا تحلل)

(9) $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4)$

$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$

فرق ومجموع مكعبين

فرق بين مكعبين

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

القوس الصغير: نأخذ الجذر التكعيبي للحد الأول

والثاني، مع الحفاظ على نفس إشارة المقدار.

القوس الكبير= (مربع الأول ثم عكس الإشارة ثم

الاول × الثاني ثم مربع الثاني)

مجموع بين مكعبين

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$$

ملحوظة مهمة

القوس الأكبر دائما لا يحلل (مميزه سالب)

مثال

(1) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

(2) $x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$

(3) $2x^3 + 128$

بإخراج العدد (2) عامل مشترك ينتج:

$= 2(x^3 + 64)$

بالتحليل مجموع مكعبين ينتج:

$= 2(x+4)(x^2-4x+16)$

مثال حل المعادلات التالية:

(1) $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$

طريقة *1*

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 2 \quad or \quad x = -2$$

طريقة *2*

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

(2) $\boldsymbol{2x^2 - 6 = 0} \rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{6}{2}$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

(3) $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$

عبارة تربيعية لا تحلل

∴ لا يوجد حل حقيقي

(4) $\boldsymbol{x^3 - 64 = 0}$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{64} \rightarrow x = 4$$

(5) $\boldsymbol{x^3 + 27 = 19 \rightarrow x^3 = 19 - 27}$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8} \rightarrow x = -2$$

عبارة تربيعية ثلاثية الحدود

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$$

حالة ١ عندما $\boldsymbol{a = 1}$ أي أن معامل $\boldsymbol{x^2}$ يساوي *(1)*

مثال حل ما يلي إلى عوامله الأولية:

(1) $\boldsymbol{x^2 - 3x - 4} = (x-4)(x+1)$

عددين حاصل ضربهما 4 والفرق بينهما 3 هما 1,4

توضيح إشارة القوسين

في القوس الأول نقوم بإنزال نفس إشارة الحد الأوسط وفي القوس الثاني نقوم بضرب إشارة الأوسط في إشارة الحد الأخير.

انتبه ضع العدد الأكبر دائماً في القوس الأول.

(2) $\boldsymbol{x^2 + 4x - 12} = (x+6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 الفرق بينهما 4 هما 2,6

(3) $\boldsymbol{x^2 + 7x + 12} = (x+4)(x+3)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 7 هما 3,4

(4) $\boldsymbol{x^2 - 8x + 12} = (x-6)(x-2)$

عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما 8 هما 2,6

(5) $\boldsymbol{x^2 + 26x - 27} = (x+27)(x-1)$

عددين حاصل ضربهما 27 والفرق بينهما 26 هما 1,27

مثال حل المعادلات التالية:

(1) $\mathbf{x^2+5x=6}$

يجب أولاً جعل المعادلة $=0$

$x^2+5x-6=0$

$\to (x+6)(x-1)=0$

$x+6=0 \quad or \quad x-1=0$

$x=-6 \quad or \quad x=1$

$x=\{-6,1\}$

(2) $\mathbf{2x=-x^2+15}$

$x^2+2x-15=0$

$\to (x+5)(x-3)=0$

$x+5=0 \quad or \quad x-3=0$

$x=-5 \quad or \quad x=3$

$x=\{-5,3\}$

ملحوظة في حالة أن العبارة التربيعية لا تحلل بين أقواس نلجأ للمميز والقانون العام.

المميز $\Delta=b^2-4ac$		
سالب	**صفر**	**موجب**
لا يوجد حل حقيقي	$x=\frac{-b}{2a}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

(3) $\mathbf{x^2+x=3} \to x^2+x-3=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(1)^2-4(1)(-3)=13$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $\mathbf{x^2+2x+3=0}$

$\Delta=b^2-4ac$

$\to \Delta=(2)^2-4(1)(3)=-8$ لا تحل

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي

حالة 2 عندما $\boldsymbol{a\neq 1}$ معامل $\boldsymbol{x^2}$ لا يساوي *(1)*

مثال *حلل ما يلي الى عوامله الأولية:*

(1) $\mathbf{2x^2+5x-3}$

$x^2+5x-(3\times 2)$ *معامل x^2 يضرب بالثابت*

x^2+5x-6 *الآن يحلل مثل حالة 1*

$(x+6)(x-1)$

بقسمة الحد الثابت بالقوس على معامل x^2 الأصلي

إذا كانت تقبل القسمة بقسمهم، لا تقبل القسمة

يوضع المعامل لـ x

$\left(x+\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$(x+3)(2x-1)$

$\to 2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$

(2) $\mathbf{3x^2+16x-12}$

$=x^2+16x-36$

$=\left(x+\frac{18}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$=(x+6)(3x-2)$

(3) $\mathbf{5x^2-11x+2}$

$$= x^2 - 11x + 10$$

$$= \left(x - \frac{10}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

$$=(x-2)(5x-1)$$

إخراج عامل مشترك

نقوم بإخراج الأس الأصغر عامل مشترك عندما لا يوجد حد مطلق (حد ثابت).

مثال *حلل ما يلي الى عوامله الأولية:*

(1) $\boldsymbol{x^2 - 3x} = x(x-3)$

(2) $\boldsymbol{5x + 10x^2} = 5x(1+2x)$

(3) $\boldsymbol{x^3 - 4x} = x(x^2-4)$

$$= x(x-2)(x+2)$$

(4) $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 2x} = x(x^2-3x+2)$

$$= x(x-2)(x-1)$$

(5) $\boldsymbol{x^2 - 4x^3} = x^2(1-4x)$

مثال *جد حل المعادلات التالية:*

(1) $\boldsymbol{x^2 = 3x}$

يجب أولاً جعل المعادلة $= 0$

انتبه لا يجوز القسمة على (x) لأن x ممكن أن تكون صفر

$$\to x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 3$$

(2) $\boldsymbol{x^2 = 4x^3} \to x^2 - 4x^3 = 0$

$$x = 0 \quad or \quad 1 = 4x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

الجزء 8
الاقترانات
التأسيس

اقتران كثير الحدود

يسمى $f(x)$ اقتران كثير حدود إذا كان على صورة:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث المعاملات أعداد حقيقية، والأسس أعداد صحيحة غير سالبة، وتسمى أكبر قوة بالدرجة.

ومن الأمثلة على كثيرات الحدود:

(1) $f(x) = x^3 - 4x + 5$

كثير حدود من الدرجة الثالثة (تكعيبي)

(2) $f(x) = 7x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$

كثير حدود من الدرجة الثانية (تربيعي)

(3) $f(x) = \frac{7}{5} - 2x$

كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي)

(4) $f(x) = \frac{2}{3}x - 7$

كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي)

(5) $f(x) = 4$

كثير حدود من الدرجة الصفرية (ثابت)

لا حظ أن كثير الحدود مكتوب على صورة بسط ومعرف بقاعدة واحدة فقط (ليس متشعب).

ومن الأمثلة على اقترانات ليست كثيرات حدود:

(1) $f(x) = 2x^{-3} + 5x - 1$

الأس عدد صحيح سالب

(2) $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - x$

الأس كسر وليس صحيح

(3) $f(x) = \sqrt{x} + 4$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ الأس كسر وليس صحيح

(4) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ اقتران نسبي

(5) $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 1 \\ x^2 - 3 & , x < 1 \end{cases}$ اقتران متشعب

ملحوظة الاقترانات المثلثية والأسية واللوغاريتمية ليست كثيرات حدود.

الصورة العامة لبعض اقترانات كثيرات الحدود

احفظ

(1) $f(x) = c$ ثابت

(2) $f(x) = ax + b$ خطي

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ تربيعي

(4) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تكعيبي

ملحوظة مهمة

إذا كان كل من البسط والمقام كثيرات حدود يسمى اقتران نسبي مثل

$$1)\ f(x) = \frac{2x+5}{x+5}$$

$$2)\ f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$$

ولكن $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{x+2}$ ليس اقتران نسبي لأن البسط ليس كثير حدود وهذا الاقتران يسمى اقتران كسري

الجزء 9 معادلات الحذف والتعويض
التأسيس

1 حل معادلتين خطيتين أو تربيعيتين

2 حل معادلتين خطية وتربيعية

حل معادلتين خطيتين أو تربيعيتين

طريقة الحذف:

مثال جد حل المعادلتين:

$$x = 5 - 3y \ldots (1)$$

$$2x = 3y + 1 \ldots (2)$$

نرتب المعادلتين كما يلي:

$$x + 3y = 5 \ldots (1)$$
$$2x - 3y = 1 \ldots (2)$$

وحتى نحذف أحد المتغيرين يجب أن تكون المعاملات

متساوية ومختلفة في الإشارة مثل $3y, -3y$

وبالتالي نجمع المعادلتين

$$\begin{array}{rl} & x + \cancel{3y} = 5 \\ + & 2x - \cancel{3y} = 1 \\ \hline & 3x = 6 \end{array}$$

$$\rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

وبتعويض $x = 2$ في أي من المعادلتين وليكن

معادلة (1) مثلا ينتج:

$$2 + 3y = 5 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$$

حل المعادلة هو الزوج $(2,1)$

مثال جد حل المعادلتين:

$$\mathbf{3x + y = 8 \ldots (1)}$$
$$\mathbf{x + 2y = 1 \ldots (2)}$$

بضرب المعادلة (1) بالعدد (-2) ينتج:

$$\begin{array}{rl} & -6x - \cancel{2y} = -16 \ldots (3) \\ + & x + \cancel{2y} = 1 \ldots (2) \\ \hline & -5x = -15 \end{array}$$

$$\rightarrow x = \frac{-15}{-5} = 3$$

وبالتعويض في معادلة (2) ينتج:

$$3 + 2y = 1 \rightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1$$

مجموعة الحل: $(3, -1)$

مثال جد حل المعادلتين:

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 = 11 \ldots (1)}$$
$$\mathbf{7x^2 - 2y^2 = 26 \ldots (2)}$$

بضرب المعادلة (1) بالعدد (2) والمعادلة (2) بالعدد (3) ينتج:

$$\begin{array}{rl} & 4x^2 + \cancel{6y^2} = 22 \ldots (3) \\ + & 21x^2 - \cancel{6y^2} = 78 \ldots (4) \\ \hline & 25x^2 = 100 \end{array}$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{100}{25} = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

وبالتعويض في معادلة (1) ينتج:

$$2(\pm 2)^2 + 3y^2 = 11$$
$$\rightarrow 8 + 3y^2 = 11 \rightarrow 3y^2 = 3$$
$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

مجموعة الحل:

$$(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)$$

حل معادلة خطية وتربيعية

في هذه الحالة نستخدم التعويض كما يلي:

من المعادلة الخطية نجعل أحد المتغيرين موضع للقانون ثم نقوم بالتعويض في المعادلة التربيعية لتصبح بمتغير واحد.

مثال جد حل المعادلتين:

$$x - y = 3 \ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 29 \ldots (2)$$

من المعادلة الخطية $\leftarrow$ $x = 3 + y$ وبالتعويض في معادلة (2) :

$$(3+y)^2 + y^2 = 29$$

$$9 + 6y + y^2 + y^2 - 29 = 0$$

$$2y^2 + 6y - 20 = 0$$

وبالقسمة على (2) ينتج:

$$y^2 + 3y - 10 = 0$$

$$(y+5)(y-2) = 0$$

$$y = -5 \quad or \quad y = 2$$

عندما $y = -5$ نعوض في المعادلة الخطية إجباري:

$$x = 3 + (-5) = -2$$

عندما $y = 2$

$$x = 3 + (2) = 5$$

مجموعة الحل: $(-2,-5), (5,2)$

الجزء 10 المجال والرسم

التأسيس

تحديد المجال

*** المجال هو قيم x التي تجعل الاقتران معرف**

تذكير هام: يكون الاقتران غير معرف بثلاث حالات:

1) اصفار المقام

2) $\sqrt[\text{زوجي}]{\text{سالب}}$

3) لوغاريتم وبداخله سالب أو صفر

لذلك أي اقتران لا ينطبق عليه الحالات الثلاث السابق ذكرها يكون دائماً معرف وبالتالي مجاله R بينما اذا كان يحتوي اصفار مقام يكون مجاله

$$R - \{\text{أصفارالمقام}\}$$

واذا كان $f(x) = \sqrt{\text{أيمن}}$ نقوم بعمل متباينه و هي

أيمن ≥ 0 ونحل المتباينة و نختار منطقة الموجب

وإذا كان $f(x) = ln\,(\text{أيمن})$ نقوم بعمل متباينة

أيمن > 0 ونحل المتباينة ونختار منطقة الموجب

مثال حدد مجال كل من الاقترانات التالية:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

الحل: مجاله $x \in R$

2) $f(x) = x^2 + sinx$

الحل: مجاله $x \in R$

3) $f(x) = e^{x^2} + 5x - 1$

الحل: مجاله $x \in R$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

الحل:

$0 =$ مقام $\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

غير معرف عند $x = 1$ **حيث** $f(1) = \frac{2}{0}$ **غيرمعرف**

مجاله $x \in R - \{1\}$

5) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 4x}$

الحل:

$0 =$ مقام $\rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0$

أصفار المقام $x = 0 \;,\; x = 4$

مجاله $x \in R - \{0\,,4\}$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7}{x^2 + 1}$

الحل:

مقام $\neq 0$ مجموع مربعين لا يحلل مجاله $x \in R$

مثال **حدد مجال كل من الاقترانات التالية :**

1) $f(x) = \sqrt{x-1}$

الحل: جذر زوجي ← $x - 1 \geq 0$

$\rightarrow x \geq 1$

مجاله $x \geq 1$

2) $f(x) = \sqrt{3x+6}$

الحل: جذر زوجي ← $3x + 6 \geq 0$

$\rightarrow 3\,x \geq -6 \rightarrow x \geq \dfrac{-6}{3} \rightarrow x \geq -2$

مجاله $x \geq -2$

لاحظ المتباينات السابقة خطية يمكن حلها مباشرة

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

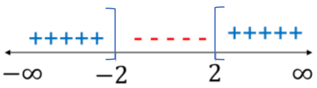
الحل: جذر زوجي ← $x^2 - 4 \geq 0$

متباينة غيرخطية

تحويلها الى معادلة $x^2 - 4 = 0$

ايجاد الجذور $x^2 = 4 \rightarrow x = \mp 2$

اختبار الاشارة



مجاله $x \geq -2$ أو $x \leq -2$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x - x^2}$

الحل: جذر فردي ← مجاله $x \in R$

5) $f(x) = \sqrt{x}$

الحل: جذر زوجي ← مجاله $x \geq 0$

6) $f(x) = ln(x+1)$

الحل: لوغاريتم ← $x + 1 > 0$

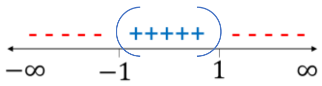
مجاله $x \geq -1$

7) $f(x) = ln(1 - x^2)$

الحل: لوغاريتم ← $1 - x^2 > 0$

متباينة غير خطية $1 - x^2 = 0$

جذور $1 = x^2 \to x = \mp 1$



مجاله $-1 < x < 1$

أو مجاله $x \in (-1 , 1)$

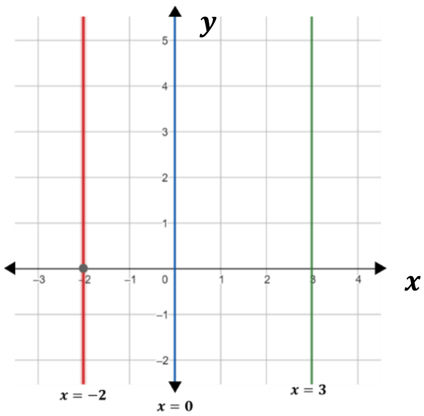
8) $f(x) = \ln x$

الحل: لوغاريتم ← مجاله $x > 0$

المستقيمات الرأسية والأفقية

مثال ارسم كل من المستقيمات التالية:

1) $x = 3$ **2)** $x = -2$ **3)** $x = 0$

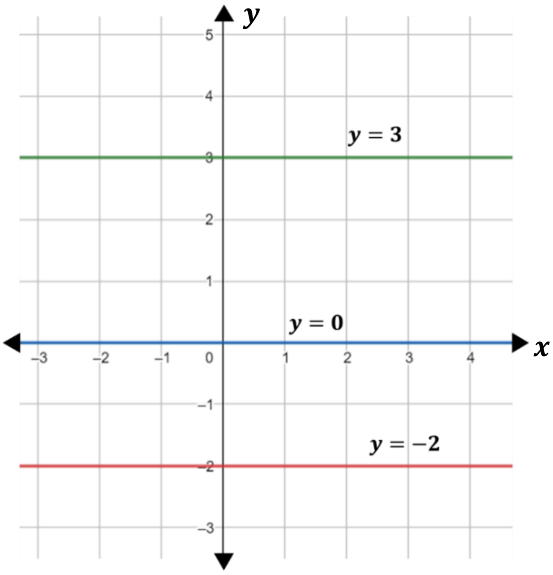


لاحظ أن المستقيم $x = c$ حيث c ثابت، يكون

مستقيم رأسي عمودي على محور x (يوازي المحور y)

مثال ارسم كل من المستقيمات التالية:

1) $y = 3$ **2)** $y = -2$ **3)** $y = 0$



لاحظ أن المستقيم $y = c$ حيث c ثابت، يكون

مستقيم أفقي يوازي المحور x ويسمى اقتران ثابت.

الاقتران الخطي

الصورة العامة: $f(x) = ax + b$

لرسم اقتران خطي نقوم بعمل جدول واختيار نقطتين

والتوصيل بينهما بخط مستقيم ويُفضل إيجاد المقطعين

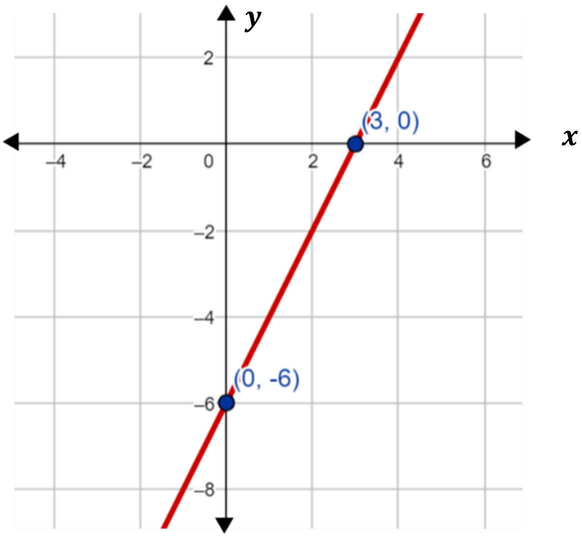
. x, y

لإيجاد المقطع (y) نجعل $x = 0$

لإيجاد المقطع (x) نجعل $y = 0$

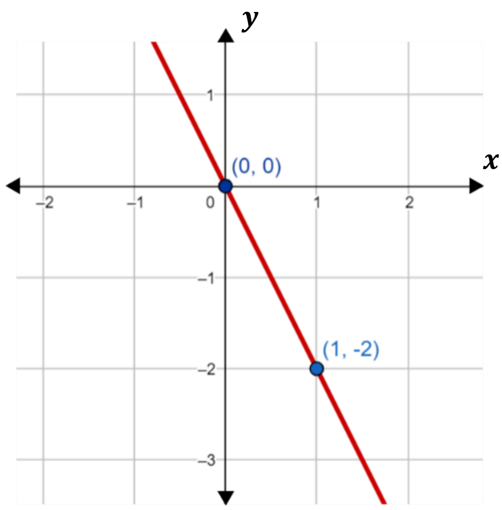
مثال ارسم الاقتران $f(x) = 2x - 6$

x	0	3
y	-6	0



مثال ارسم الاقتران $f(x) = -2x$

x	0	1
y	0	-2



مهم معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ الميل

مثال جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$(2, -1), (4, -5)$ ؟

$$(2, -1) \to (x_1, y_1)$$
$$(4, -5) \to (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - -1}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

معادلته هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - -1 = -2(x - 2)$$
$$y + 1 = -2x + 4$$
$$\to y = -2x + 3$$

الاقتران التربيعي

الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$

هو قطع مكافئ يكون اتجاه الفتحة إما لأعلى أو لأسفل

حسب إشارة معامل (x^2)

ولرسم اقتران تربيعي نجد احداثيات رأس القطع (x, y)

حيث $x = \frac{-b}{2a}$ و $y = f(\frac{-b}{2a})$ ثم عمل جدول يتضمن

نقطة الرأس ونقطتين على يمين ويسار نقطة الرأس.

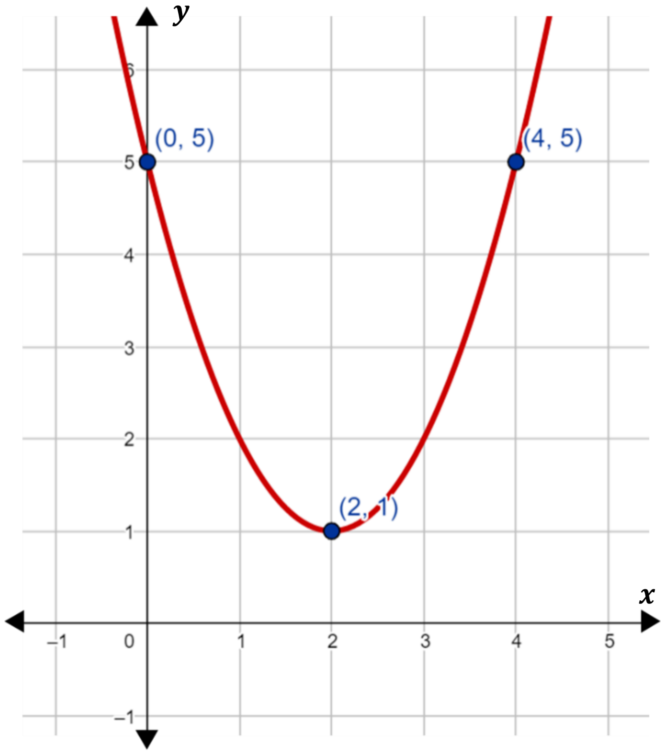
مثال ارسم الاقتران $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 1$$

الرأس ← $(2,1)$

x	0	2	4
y	5	1	5



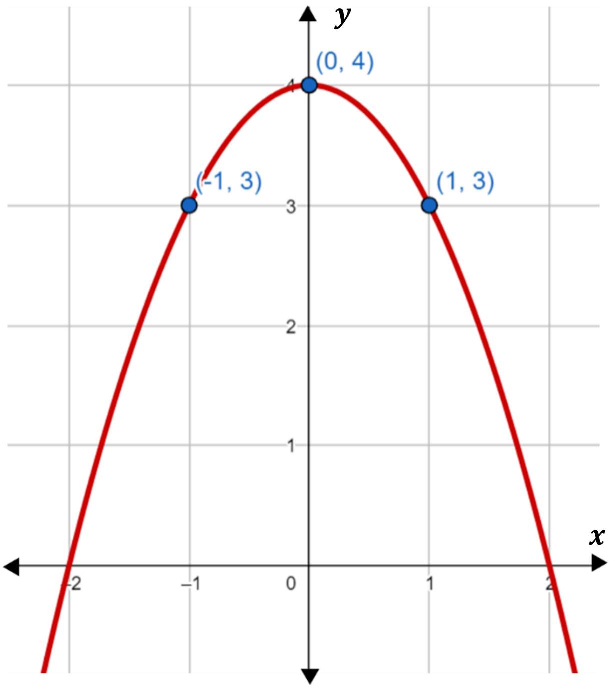
مثال ارسم الاقتران $y = 4 - x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} = 0$$

$$y = 4 - (0)^2 = 4$$

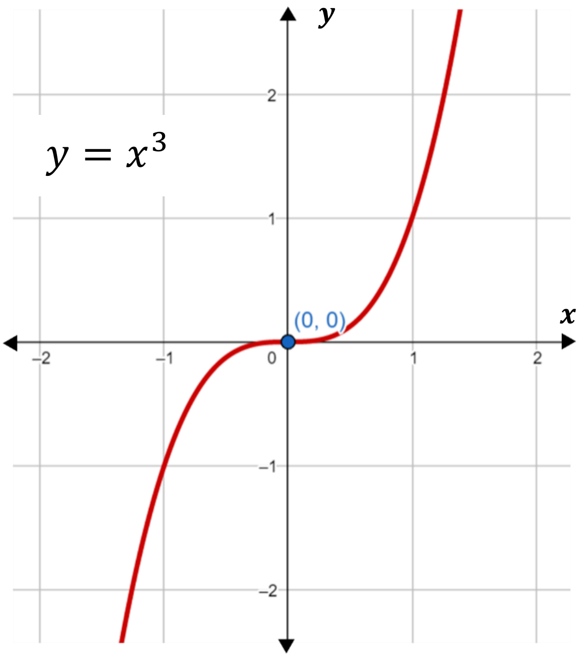
الرأس ← $(0,4)$

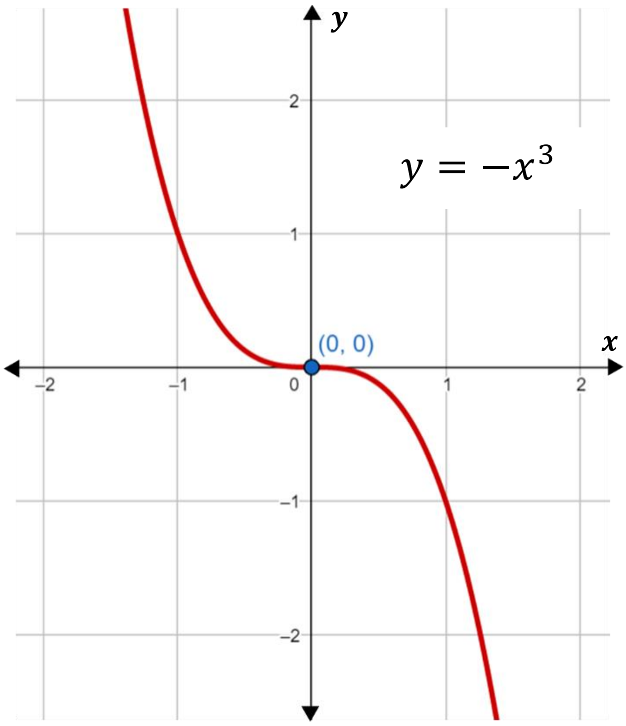
x	-1	0	1
y	3	4	3



الاقتران التكعيبي

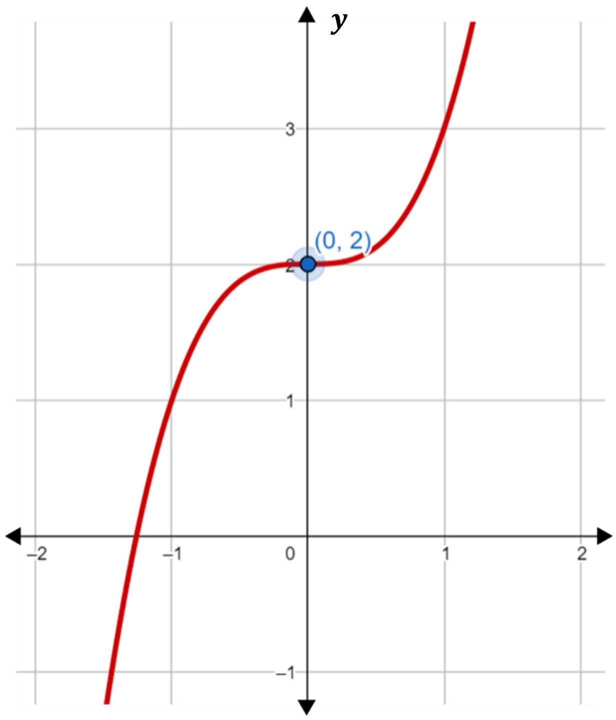
احفظ رسمة كل من $y = x^3$ ، $y = -x^3$





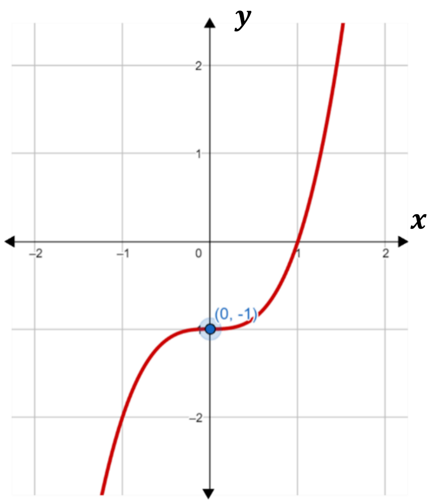
مثال ارسم الاقتران $y = x^3 + 2$

نفس رسمة $y = x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأعلى بمقدار وحدتين.



مثال ارسم الاقتران $y = x^3 - 1$

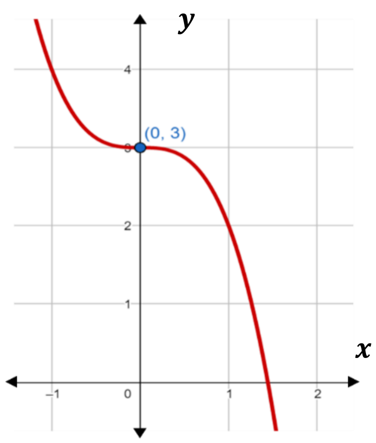
نفس رسمة $y = x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأسفل بمقدار وحده واحده.



مثال ارسم الاقتران $y = 3 - x^3$

إعادة ترتيب $\leftarrow$ $y = -x^3 + 3$

نفس رسمة $y = -x^3$ ولكن نقوم بعمل انسحاب للأعلى بمقدار (3) وحدات.



الجزء 11 الاقترانات الدائرية
التأسيس

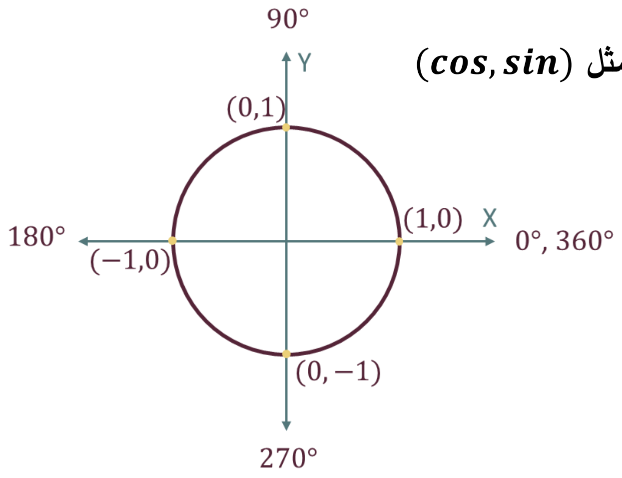
1 يتم حفظ جدول زوايا المرجع: $30°, 45°, 60°$

x	$\frac{\pi}{6} = 30^0$	$\frac{\pi}{4} = 45^0$	$\frac{\pi}{3} = 60^0$
$sinx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cosx$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$tanx$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

2 زوايا المحاور:

$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

هذه الزوايا يتم حفظها من دائرة الوحدة حيث كل زوج يمثل (cos, sin)



لاحظ أن:

$cos(90°) = 0$, $sin(90°) = 1$

$cos(\pi) = -1$, $sin(\pi) = 0$

ملحوظة لتحويل الزاوية من درجات إلى راديان:

نضرب بـ $\left(\frac{\pi}{180°}\right)$

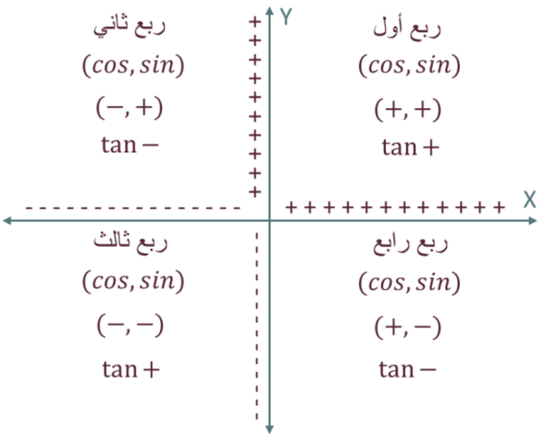
مثلاً: $120° = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

وللتحويل الزاوية من راديان إلى درجات

نضرب بـ $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

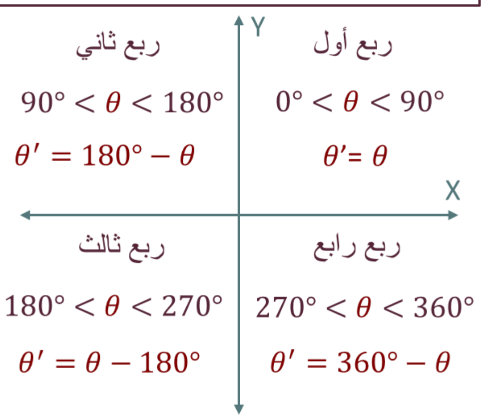
مثلاً: $\frac{4\pi}{3} = \frac{4(180)}{3} = 240°$

3 إشارة الاقترانات المثلثية في الأرباع الأربعة



4 قيمة الزاوية في الأرباع

إذا كانت θ : الزاوية
وكانت θ' : زاوية المرجع



5 إيجاد قيمة الاقترانات المثلثية:

مثال جد قيمة كل مما يلي:

(1) $\boldsymbol{cos}(\mathbf{120}°)$

نحدد الربع حيث $120°$ تقع في الربع الثاني

وبالتالي تكون إشارة cos سالبة، ثم نحدد زاوية

المرجع حيث:

مرجع $= 60° = 120° - 180°$

$$\rightarrow cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}$$

(2) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{135}°) = sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثاني

مرجع $= 45° = 135° - 180°$

(3) $\boldsymbol{cos}(\mathbf{225}°) = -cos(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثالث

مرجع $= 45° = 180° - 225°$

(4) $\boldsymbol{tan}(\mathbf{210}°) = tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ربع ثالث

مرجع $= 30° = 180° - 210°$

(5) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{300}°) = -sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ربع رابع

مرجع $= 60° = 300° - 360°$

(6) $\boldsymbol{sin}(\mathbf{450}°)$

إذا زادت الزاوية عن $360°$ نقوم بطرح

دورة (360)

$$450° - 360° = 90°$$

$$sin(450°) = sin(90°) = 1$$

ملحوظة مهمة

$$\boldsymbol{sin(-x) = -sin(x)}$$

$$\boldsymbol{cos(-x) = cos(x)}$$

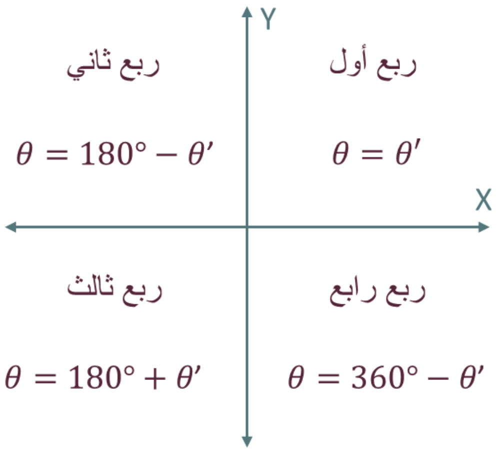
$$\boldsymbol{tan(-x) = -tan(x)}$$

(7) $\boldsymbol{cos}(-\mathbf{60}°) = cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{sin}(-\mathbf{60}) = -sin(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boldsymbol{tan}(-\mathbf{60}) = -tan(60) = -\sqrt{3}$

6 الحالة العكسية

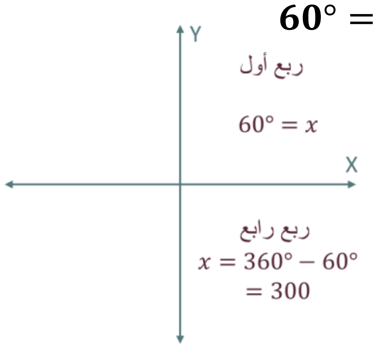


مثال جد حل المعادلات التالية:

(1) $\cos x = \frac{1}{2}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\cos$ موجب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $60° =$



الحل الأولي:

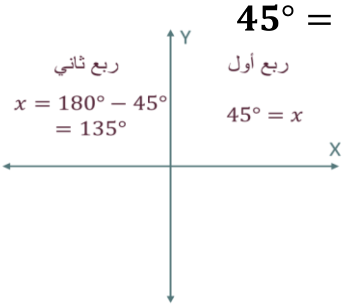
$x = 60°$

$x = 300°$

(2) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\sin$ موجب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $45° =$



الحل الأولي:

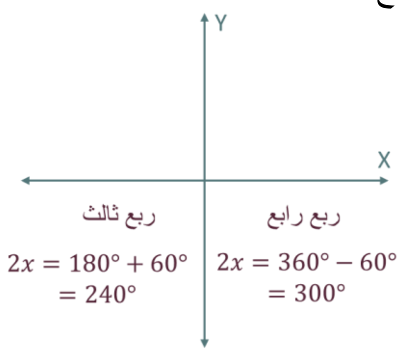
$x = 45°$

$x = 135°$

(3) $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\sin$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $60° =$



الحل الأولي:

$2x = 240°$

$\rightarrow x = 120°$

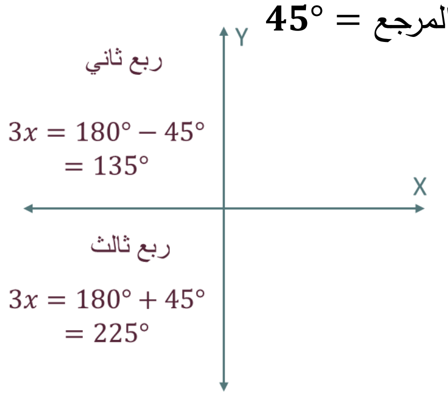
$2x = 300°$

$\rightarrow x = 150°$

(4) $\cos(3x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\cos$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $45° =$



الحل الأولي:

$3x = 135°$

$\rightarrow x = 45°$

$3x = 225°$

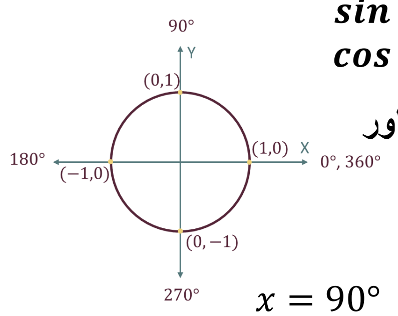
$\rightarrow x = 75°$

(5) $\cos x = 0$

ملحوظة مهمة

$\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} = \{-1, 0, 1\}$

تكون الزوايا محاور



الحل الأولي:

$x = 90° \quad , \quad x = 270°$

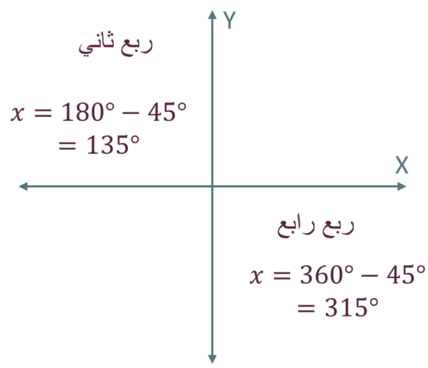
(6) $\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

(7) $\tan x = -1$

أولاً نحدد الأرباع التي يكون فيها $\tan$ سالب

ثانياً نحدد زاوية المرجع $45° =$



الحل الأولي:

$x = 135°$

$x = 315°$